Função Modular

Módulo de um Número Real

Dado um número real **x**, o **módulo de x** é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

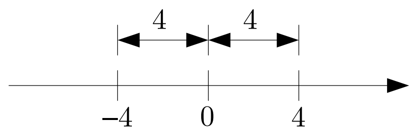
Observação: O módulo de um número real nunca é negativo.

Exemplo 1: $|3| = 3$

Exemplo 2: $|-10| = -(-10) = 10$

Exemplo 3: $|0| = 0$

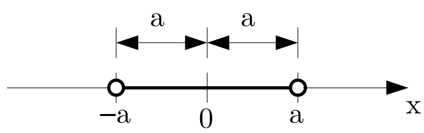
Geometricamente, o **módulo de x** é igual à **distância do ponto que representa na reta real à origem** independentemente de suas posições relativas. Por isso temos, por exemplo, que $|4| = |-4| = 4$ que é a distância da cada número até a origem. Veja o gráfico abaixo:



Pensando ainda na interpretação geométrica do módulo, podemos verificar como são resolvidas as **inequações modulares**, pois se o módulo de um número real x **é menor do que uma constante a** temos que sua **distância até a origem é menor do que a.** Ou seja, qualquer número entre $-a$ e a serve como solução. Assim:

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

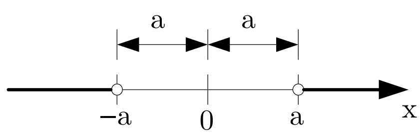
Represntando graficamente:



De modo análogo podemos definir quando o módulo é maior do um valor positivo a:

$$|x| > a \Leftrightarrow x < a \text{ ou } x > a$$

Representando graficamente:



Equações Modulares

É toda equação que contiver a incógnita em módulo.

Exemplo 1: $|x| = 4$

Exemplo 2: $|x + 8| = 1$

Exemplo 3: $|x| + |x - 1| = 5$

Solução

Vamos mostrar com exemplos práticos como resolvemos uma equação deste tipo.

Exemplo 1: Resolver a equação modular $|3x-4|=2$.

Solução: Temos duas possibilidades:

$$\textbf{(1)}\ 3x-4=2 \text{ ou } \textbf{(2)}\ 3x-4=-2$$

Vamos a cada solução:

De (**1**):

$$3x=6$$
$$x=\frac{6}{3}$$
$$x=2$$

De (**2**):

$$3x=2$$
$$x=\frac{2}{3}$$

Repare que substituindo estes valores na equação modular obtemos o valor correto:

$$|3\cdot 2-4|=\left|3\cdot\frac{2}{3}-4\right|\Rightarrow|6-4|=|2-4|\Rightarrow|2|=|-2|=2$$

Exemplo 2: Encontre os valores de x que satisfazem a equação modular $|x-7|=-1$.

Solução: Não há valores para x que satisfazem esta equação, pois o múdulo de um número real é sempre **positivo** ou **nulo**. O conjunto-solução é, portanto, vazio.

Exemplo 3: Encontre os valores de x que verificam a igualdade: $|x+1|=|-2x+4|$.

Solução: Para este tipo de problema temos que "retirar" cada módulo e verificar as possibilidades. Da definição decorre que:

$$x+1=|-2x+4| \text{ ou } x+1=-|-2x+4|$$

Criamos então duas novas equações modulares. Basta reaplicar a definição:

$$\textbf{(1)}\ x+1=-2x+4 \text{ ou } \textbf{(2)}\ -x-1=-2x+4$$

De (**1**):

$$x+1=-2x+4$$
$$3x=3$$
$$x=1$$

De (**2**):

$$-x-1=-2x+4$$
$$x=5$$

A segunda opção vai nos levar às mesmas soluções:

$$x+1=-|-2x+4|\Rightarrow\begin{cases}-2x+4=-x-1\Rightarrow x=5\\ -2x+4=x+1\Rightarrow x=3\end{cases}$$

Testando os valores veremos que as soluções estão corretas.

Inequações Modulares

Inequações modulares são inequações em qua a incógnita aparece dentro de um módulo. Para solucioná-la, basta levar em conta a definição de módulo e o que visto anteriormente. Veja um exemplo:

Exemplo 1: Calcular os valores possíveis de x para que se tenha $|3x+2|>5$.

Solução: Lembrando que a ideia de módulo está associada à distância da origem da reta real, para que o módulo seja maior do que um valor positivo qualquer devemos ter que ele deve ser maior do que o próprio valor ou menor que o simétrico dele, ou seja:

$$\textbf{(1)}\ 3x+2<-5 \text{ ou } \textbf{(2)}\ 3x+2>5$$

Portanto, de **(1)**:

$$3x + 2 < -5$$
$$3x < -7$$
$$x < -\frac{7}{3}$$

E, também, de **(2)**:

$$3x + 2 > 5$$
$$3x > 3$$
$$x > 1$$

Como vale uma solução ou outra devemos ter a **união** dos intervalos. Portanto, a solução será:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{7}{3} \cup x > 1 \right\}$$

Escrevendo como um intervalo:

$$S = \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup [1, +\infty[$$

Função Modular

Definição

Denominamos por função modular a função $f(x) = |x|$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Gráfico

Para fazer o gráfico de uma função modular qualquer, devemos levar em conta que ela é regida por duas expressões. Como exemplo prático, vamos fazer o gráfico da função definida anteriormente.

Exemplo 1: Faça o gráfico da função real definida por $f(x) = |x|$.

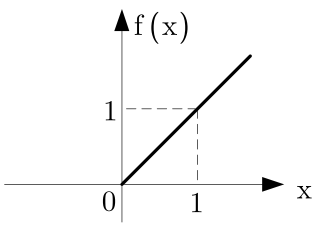
Solução: Primeiro, separamos em dois intervalos disjuntos, a partir da definição temos que:

(1) Para $x \geq 0$, $f(x) = x$, que é uma função do 1º grau (função identidade):

Fazemos uma tabela para colocar os valores do domínio e calcular as respectivas imagens:

x	$f(x)$
0	0
1	1

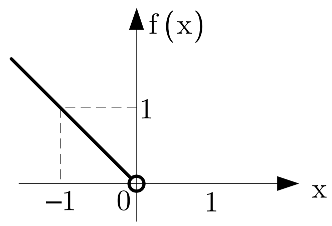
Colocando estes pontos em um eixo cartesiano:



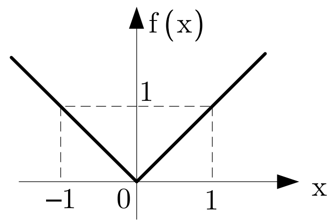
(2) Para $x < 0$, $f(x) = -x$, que é uma função do 1º grau (linear):
Fazemos uma tabela para colocar os valores do domínio e calcular as respectivas imagens:

x	$f(x)$
0	0
1	–1

Observação: Repare que $x = 0$ **não faz parte do domínio**, mas precisamos testar a continuidade da função.
Colocando estes pontos em um eixo cartesiano:



Colocando os dois gráficos sobre um mesmo eixo cartesiano:



Exercícios de Fixação

1) Ache o conjunto verdade da inequação: $|x^2 - 4| < 3x$.

2) Resolva a inequação: $\left|\dfrac{x+2}{2x-1}\right| \geq 1$.

3) Construa o gráfico de $f(x) = |x-1| - 1$.

4) Faça o gráfico de $f(x) = |x^2 - 4|$.

5) Sendo **f** e **g** funções reais definidas por $f(x) = |x-3|$ e $g(x) = |x+3|$, determine o valor de $(f[g(-5)])$.

6) Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

7) Sendo **x** e **y** reais determine os possíveis valores da expressão: $A = \dfrac{|x|}{x} + \dfrac{|y|}{y} + \dfrac{|xy|}{xy}$.

8) Para que valores de x a função $f(x) = |x+2| + |x|$, é constante?

9) Qual o conjunto solução da equação $|x|^2 + 3|x| - 4 = 0$?

10) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$, então quem é $A \cap B$?

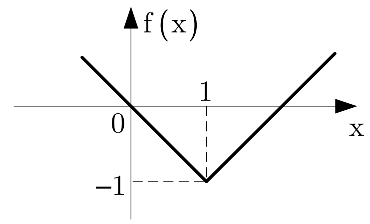
11) Resolva a inequação modular: $\left|\dfrac{x+4}{2x-2}\right| < 1$.

Gabarito

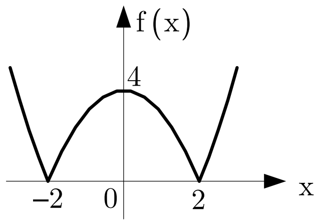
1) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 < x < 4\}$

2) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, -\frac{1}{3} \le x \le 3, x \ne \frac{1}{2}\right\}$

3)

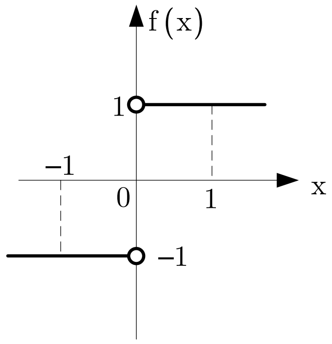


4)



5) 1

6)



7) $\{-1, 3\}$

8) $[-2, 0[$

9) $\{-1, 1\}$

10) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \le -2 \cup 2 \le x < 3\}$

11) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{2}{3} \cup x > 6\right\}$