Função Logarítmica

Introdução

Veja a sequência de cálculos abaixo:

$$2^1 = 2$$
$$2^2 = 4$$
$$\boxed{2^x = 6}$$
$$2^3 = 8$$

Qual deve ser o valor de **x** nesse caso?

Como a função exponencial é estritamente crescente, certamente x está entre 2 e 3. Mais adiante veremos que este valor é $\log_2 6$.

Definição

O logaritmo de um número real e positivo b, na base a, positiva e diferente de 1, é o número x ao qual se deve elevar a base para se obter b.

$$\underbrace{\log_a b = x}_{\text{forma logarítmica}} \Leftrightarrow \underbrace{a^x = b}_{\text{forma exponencial}} \tag{1.1}$$

$$b > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Exemplo 1: Calcule o valor do logaritmo $\log_{10} 0,01$.

Solução: Aplicando a definição (1.1), temos:

$$\log_{10} \frac{1}{100} = x \Rightarrow 10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2$$

Observação 1: Quando a base é 10 podemos omiti-la.

Condições de Existência

Para que o logaritmo sempre exista devemos ter:

$$\log_a b \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \end{cases}$$

Chamamos de **campo de existência** ou domínio dos logaritmos.

Exemplo 1: Calcule o valor de x na expressão $\log_x \left(\frac{1}{4}\right) = 2$.

Solução: Aplicando a definição teremos:

$$x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Testando as condições de existência:

$$x > 0 \text{ e } x \neq 1$$

Portanto, somente um valor de x atende ao problema:

$$x = \frac{1}{2}$$

Conseqüências da Definição

A partir da definição de logaritmos, algumas particularidades ocorrem e estas são importantes para a resolução de problemas:

1) $\log_a 1 = 0$

2) $\log_a a = 1$
3) $\log_a a^m = m$
4) $a^{\log_a b} = b$
5) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Equações Logarítmicas

São as equações que envolvem logaritmos. Para resolver seguimos três passos simples:

1) Indicar as condições de existência;
2) Resolver a equação; e
3) Verificar a solução nas condições de existência.

Exemplo 1: Resolver a equação: $\log_4(5x-1) = 2$.

Solução: Seguindo os passos temos:

1) Condições de existência (CE):

$$5x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{5}$$

2) Aplicando a definição:

$$5x - 1 = 4^2 \Rightarrow x = \frac{17}{5}$$

3) Verificando as CE temos:

$$\frac{17}{5} > \frac{1}{5}$$

Portanto, a solução encontrada é válida.

$$S = \{\frac{17}{5}\}$$

Propriedades Operacionais dos Logaritmos

Segue abaixo uma lista de propriedades dos logaritmos que aplicaremos para resolver problemas.

1) $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$
2) $\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$
3) $\log_b a^n = n \log_b a$
4) $\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log_b a$
5) $\log_{b^n} a = \frac{1}{n}\log_b a$

Aplicação das Propriedades na Resolução de Equações

Vamos aplicar as propriedades vistas anteriormente na resolução de equações.

Exemplo 1: Resolver a equação $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$.

Solução: Primeiro vamos às CE:

$$\begin{gathered} \textbf{1)}\ x + 2 > 0 \\ x > -2 \\ \text{e} \\ \textbf{2)}\ x - 2 > 0 \\ x > 2 \end{gathered}$$

Para que exista o logaritmo, ambas as condições **1)** e **2)** devem ser satisfeitas, portanto teremos $x > 2$.
Como vimos, a soma de logaritmos equivale ao logaritmo de um produto, logo:

$$\log_2 (x-2)(x+2) = 5$$
$$\log_2 (x^2 - 4) = 5$$
$$x^2 - 4 = 32$$
$$x^2 = 36$$

O que nos dá

$$x = -6 \text{ ou } x = 6$$

Verificando as condições de existência, temos

$$x = 6$$

Portanto

$$S = \{6\}$$

Mudança de Base

Para mudarmos um logaritmo na base **b**, de um número **a** para o logaritmo de **a** na base **c**, usamos a seguinte relação:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \tag{1.2}$$

Exemplo 1: Sendo $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,4$, calcular $\log_2 6$.
Solução: Podemos usar a relação (1.2). Como os valores dados estão na base 10 podemos fazer:

$$\log_2 6 = \frac{\log 6}{\log 2}$$

Para calcular $\log 6$ podemos usar a propriedade do logaritmo de um produto:

$$\log_2 6 = \frac{\log 2 \cdot 3}{\log 2}$$
$$\log_2 6 = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2}$$

Pelos valores dados

$$\log_2 6 = \frac{0,3 + 0,4}{0,3}$$
$$\log_2 6 = \frac{7}{3}$$

Gráfico da Função Logarítmica

Seja a função logarítmica:

$$f(x) = \log_2 x$$

Adotando valores positivos para x e, calculando o correspondente em y, teremos o Gráfico 1:

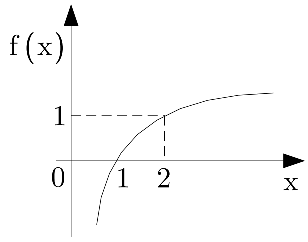

Gráfico 1

Agora vamos considerar a função

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

Fazendo o mesmo procedimento anterior, teremos o Gráfico 2:

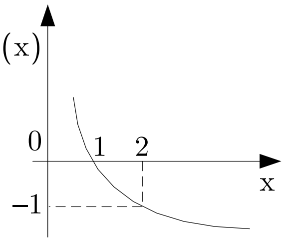

Gráfico 2

Dos exemplos dados, podemos concluir que:

— Se $a > 1$, então $f(x) = \log_a x$ é crescente.

— Se $0 < a < 1$, então $f(x) = \log_a x$ é decrescente.

Inequações Logarítmicas

Para resolvermos um problema envolvendo desigualdades e logaritmos, devemos levar em conta as condições de existência e a base do logaritmo, devido às propriedades do gráfico de uma função logarítmica. Veja:

Se $a > 1$ teremos uma função crescente, o que significa dizer que

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow y_1 < y_2$$

Então

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

Se $0 < a < 1$ teremos uma função decrescente, o que significa dizer que

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow y_1 > y_2$$

Então

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

Exemplo 1: Resolver a inequação $\log_3 (5x - 1) > \log_3 4$.

Solução: Checando as condições de existência:

$$5x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{5}$$

Como a base é maior que 1 (a base vale 3) a desigualdade se conserva:

$$5x - 1 > 4$$
$$5x > 5$$
$$x > 1$$

Como a solução satisfaz as condições de existência, então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

Exercícios de Fixação

1) A solução da equação $4^{6-x} = \frac{1}{16}$ é o número real k. Calcule a logaritmo de k na base 2.

2) No campo real para que valores de x tem sentido a expressão: $y = \log_{10}\left(x^2 + x - 12\right)$?

3) Determinar o conjunto de valores reais para que seja possível definir $y = \log_{10}\left(\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x + 1}\right)$.

4) Determine o valor da expressão: $5^{\log_4 3 \cdot \log_5 4}$

5) Determine y, se $\log_{25}\left(\log_3 y\right) = \frac{1}{2}$

6) Seja k a solução da equação $2^{\log_8(\log_2 x)} = \frac{1}{2}$. Calcule o valor de k^8.

7) Resolva, no campo real, a equação $\log_{10}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = 0$.

8) Dê o conjunto solução da equação $\frac{3 + \log x}{2 - \log x} = 4$.

9) Calcule $\log_c \sqrt[3]{a\sqrt[3]{b\sqrt[3]{c}}}$, sendo $\log_c a = 5$ e $\log_c b = 2$.

10) Encontre os valores de x para os quais $2\log x = \log 4 + \log 3x$.

11) Resolva a equação $\log\left(5^{2-x}\right)^{2+x} + \log 400 = 4$.

12) Dê o conjunto solução da equação $\log_3 x + \frac{1}{\log_{3x} 9} = 2$.

Gabarito

1) 3

2) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \cup x > 3\}$

3) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \cup x > 4\}$

4) 3

5) 243

6) 2

7) $\{0,1\}$

8) $\{10\}$

9) $\frac{52}{27}$

10) $\{12\}$

11) $\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$

12) $\{3\}$