Produtos Notáveis

Leonardo Santos

20 de abril de 2014

1 Introdução

Os produtos notáveis são produtos que são recorrentes e cujo resultado é útil para que seja, de certa forma, memorizado a fim de evitar as passagens algébricas trabalhosas.

2 Principais Produtos Notáveis

O que temos a seguir são as demonstrações algébricas dos principais produtos notáveis e algumas observações quando necessárias.

2.1 Quadrado da Soma

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2+ab+ab+b^2 \\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

Como observação segue que:

$$(-a-b)^2 = [-(a+b)]^2 = (-1)^2(a+b)^2 = (a+b)^2$$

2.2 Quadrado da Diferença

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\ &= a^2-ab-ab+b^2 \\ &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

Como observação segue que:

$$(b-a)^2 = [-(a-b)]^2 = (-1)^2(a-b)^2 = (a-b)^2$$

2.3 Produto da Soma pela Diferença

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b) &= a^2+ab-ab-b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

2.4 Quadrado da Soma de Três Termos

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c)\\ &= a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\end{aligned}$$

Como observação decorre que as operações entre os termos devem ser respeitadas, por exemplo:

$$(-a+b-c)^2 = [(-a)+b+(-c)]^2 = a^2+b^2+c^2+2(-ab+ac-bc)$$

2.5 Quadrado da Soma de Quatro Termos

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 &= (a+b+c+d)(a+b+c+d)\\ &= a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\end{aligned}$$

2.6 Quadrado da Soma de n Termos

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 &= (a_1+a_2+\ldots+a_n)(a_1+a_2+\ldots+a_n)\\ &= a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+\textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_j,\, i\neq j\end{aligned}$$

2.7 Cubo da Soma

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Como observação segue que:

$$(-a-b)^3 = [-(a+b)]^3 = (-1)^3(a+b)^3 = -(a+b)^3$$

2.8 Cubo da Diferença

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)(a-b)\\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-ba^2+2ab^2-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

Como observação segue que:

$$(b-a)^3 = [-(a-b)]^3 = (-1)^3(a-b)^3 = -(a-b)^3$$

2.9 Quadrado do Quadrado da Soma/Diferença

$$\begin{aligned}(a\pm b)^4 &= (a\pm b)^2(a\pm b)^2\\ &= (a^2\pm 2ab+b^2)(a^2\pm 2ab+b^2)\\ &= (a^2\pm 2ab+b^2)^2\\ &= a^4+4a^2b^2+b^4+2(a^2b^2\pm 2a^3b\pm 2ab^3)\end{aligned}$$

2.10 Cubo da Soma de Três Termos

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)\\ &= (a+b+c)[a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\\ &= a^3+b^3+c^3+3(ab^2+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+bc^2)+6abc\end{aligned}$$

2.11 Produto de Stevin

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2+ax+xb+ab\\ &= x^2+(a+b)x+ab\end{aligned}$$

O produto de Stevin é muito útil ao entendimento da demonstração das soluções das equações do segundo grau. Ele convém então para este fim.

3 Considerações Geométricas Sobre os Produtos Notáveis

Em alguns casos há uma visualização geométrica dos produtos notáveis. O que vemos a seguir são alguns destes casos.

3.1 Quadrado de Lado $a + b$ e o Quadrado da Soma

Observe a figura 1 em que temos um quadrado de lado $a + b$ dividido de forma conveniente em quatro retângulos de áreas A_1, A_2, A_3 e A_4:

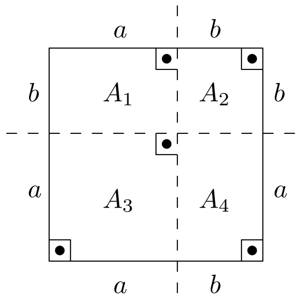

Figura 1: Quadrado de lado $a + b$ dividido em quatro retângulos.

Repare que a área A do quadrado é igual a soma $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Ou seja:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Vemos da própria figura que:

$$A = (a + b)^2 \quad A_1 = ab \quad A_2 = b^2 \quad A_3 = a^2 \quad A_4 = ab$$

Substituindo teremos:

$$A = ab + b^2 + a^2 + ab \Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Que coincide com o visto na seção 2.1.

3.2 Quadrado de Lado a e o Quadrado da Diferença

Observe a figura 2 em que temos um quadrado de lado a dividido de forma conveniente em quatro retângulos de áreas A_1, A_2, A_3 e A_4:
Repare que a área A do quadrado é igual a soma $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Ou seja:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Vemos da própria figura que:

$$A = a^2 \quad A_1 = (a - b)b \quad A_2 = b^2 \quad A_3 = (a - b)^2 \quad A_4 = (a - b)b$$

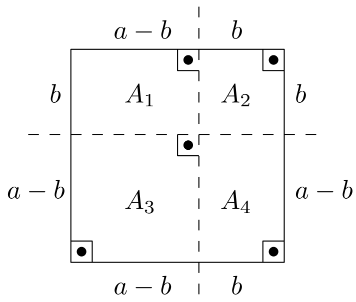

Figura 2: Quadrado de lado a dividido em quatro retângulos.

Substituindo teremos:

$A = (a-b)b + b^2 + (a-b)^2 + (a-b)b \Rightarrow a^2 = ab - b^2 + b^2 + (a-b)^2 + ab - b^2$

De onde vem que:

$$a^2 = 2ab + (a-b)^2 - b^2 \Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Que coincide com o visto na seção 2.2.

3.3 Um Retângulo e o Produto da Soma Pela Diferença

Considere a figura 3 em que temos um retângulo de lados a e $a+b$ e área A.

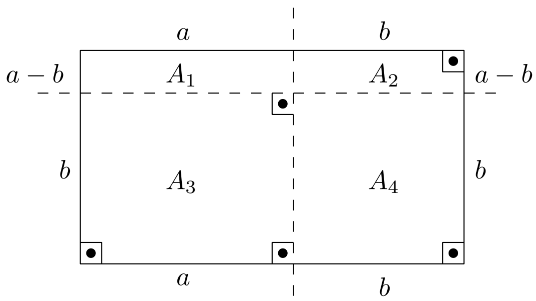

Figura 3: Retângulo dividido em quatro retângulos.

Vemos da figura que as áreas A_1, A_2, A_3 e A_4 são:

$$A = a(a+b) \quad A_1 = a(a-b) \quad A_2 = b(a-b) \quad A_3 = ab \quad A_4 = b^2$$

Assim:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Logo:

$$a(a+b) = a(a-b) + b(a-b) + ab + b^2$$

Daí:

$$a^2 + ab = (a+b)(a-b) + ab + b^2$$

O que nos dá:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

De acordo com o que vemos em 2.3.

3.4 Outras Associações Gemométricas

Estas não são as únicas associações geométricas que podem ser feitas. Para mostrar o quadrado da soma de três termos, por exemplo, basta tomar um quadrado de lado $a+b+c$, dividi-lo em nove retângulos e somar suas áreas. Para o cubo da soma, por exemplo, basta tomar um cubo de lado $a+b$ e dividi-lo em paralelepípedos convenientes e somar seus volumes.

4 Considerações Finais

Todos os produtos notáveis são obtidos por meio de manipulações algébricas, basta um algebrismo comum para obtê-los. Em raras exceções precisamos de artifícios algébricos. É importante, no entanto, que eles sejam bastante utilizados, para que se tornem comuns ao estudante e seu uso passe a ser corriqueiro, em lugar de trabalhoso.