# Sucessão ou Sequência

## Definição

Sucessão ou seqüência é todo conjunto que consideramos os elementos dispostos em certa ordem.

**Exemplo 1:** $(\text{janeiro}, \text{fevereiro}, \ldots, \text{dezembro})$

**Exemplo 2:** $(0, 1, 2, 3, \ldots)$

## Sequência Numérica

É um conjunto de números reais dispostos numa certa ordem. Pode ser finita ou infinita.

**Exemplo 1:** $(2, 5, 8, 11, 14)$ — Sequência finita.

**Exemplo 2:** $(4, 8, 10, \ldots)$ — Sequência infinita.

## Representação de uma sucessão

A representação matemática de uma sucessão é:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

Os índices representam a posição de cada termo, primeiro, segundo, n-ésimo (índice n), etc.

**Exemplo 1:** Dada a seqüência $(2, 5, 9, 14, 20, 27)$, calcular $a_2 - 2a_5^2$.

**Solução:** Usando a própria definição dada:

$$a_1 - 2(a_5)^2 = 2 - 2 \cdot 20^2 = -798$$

## Determinação de uma sucessão

As sucessões são dadas por uma lei chamada lei de formação, com a qual podemos calcular qualquer termo da sucessão.

**Exemplo 1:** Escrever a sucessão em que $a_n = 2n$ e $n \in \{1, 2, 3\}$:

$$a_1 = 2 \cdot 1 \Rightarrow a_1 = 2$$
$$a_2 = 2 \cdot 2 \Rightarrow a_2 = 4$$
$$a_3 = 2 \cdot 3 \Rightarrow a_3 = 6$$

A sequência é, portanto:

$$(a_1, a_2, a_3) = (2, 4, 6)$$

# Progressões Aritméticas

## Definição

Progressão aritmética (P.A.) é uma seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com um número fixo, chamado de razão.

**Exemplo 1:** $(2, 5, 8, 11, \ldots)$

**Observação 1:** Note que cada termo é igual ao anterior somado de três unidades.
Uma P.A. pode ser crescente ($r > 0$), decrescente ($r < 0$) ou constante ($r = 0$).

**Exemplo 2:** A P.A. $(3,4,5,6,7)$ é crescente e a razão vale $r = 1$.

**Exemplo 3:** A P.A. $(10,8,6,4,...)$ é decrescente e a razão vale $r = -2$.

**Exemplo 4:** A P.A. $(5,5,5,5,...)$ é constante e $r = 0$.

## Representação de uma P.A.

A representação matemática de uma P.A. é:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$$

Como sabemos que cada termo é igual a soma do termo anterior com a razão teremos:

$$a_{n+1} = a_n + r, \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (1.1)$$

E, como consequência desta definição:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_{n+1} - a_n = r$$

**Exemplo 1:** Calcular $r$ e $a_5$ na P.A. $(3,9,15,21,...)$.

**Solução:** Usando a definição (1.1) sabemos que:

$$a_2 = a_1 + r$$

Da sequência extraímos os valores do segundo e do primeiro termo:

$$9 = 3 + r$$
$$r = 6$$

Pela mesma definição:

$$a_5 = a_4 + r$$
$$a_5 = 21 + 6$$
$$a_5 = 27$$

## Fórmula do Termo Geral de uma P.A.

Seja $a_n$ um termo qualquer da progressão. Então podemos escrever cada termo da progressão, a partir do segundo, em função do primeiro termo da sequência:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = \underbrace{a_1 + r}_{a_2} + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = \underbrace{a_1 + 2r}_{a_3} + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + r \Rightarrow a_n = \underbrace{a_1 + (n-2)r}_{a_{n-1}} + r \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r$$

Fica definido, portanto, o termo geral de uma P.A.:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \qquad (1.2)$$

**Observação:** Uma consequência desta definição é que qualquer termo pode ser escrito a partir de qualquer termo da progressão, desde que a razão seja conhecida. Veja os exemplos:

**Exemplo 1:** Podemos escrever o décimo termo em função do sétimo termo:

$$a_{10} = a_7 + 3r$$

**Exemplo 2:** Podemos escrever o vigésimo primeiro termo em função do trigésimo termo:

$$a_{21} = a_{30} - 9r$$

**Exemplo 3:** Encontrar o termo geral da P.A. $(4, 7, ...)$.

**Solução:** Aplicando a expressão (1.2) do termo geral:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Falta calcular a razão:

$$r = 7 - 4$$
$$r = 3$$

Assim:

$$a_n = 4 + (n-1)\cdot 3$$
$$a_n = 3n + 1$$

## Observações Sobre a Resolução de Problemas de P.A.

**Observação 1:** É sempre conveniente colocar os termos em função de $a_1$ e de $r$, lembrando-se da fórmula do termo geral.

**Exemplo 1:** Numa P.A. temos: $\begin{cases} a_2 + a_6 = 20 \\ a_4 + a_9 = 35 \end{cases}$, escrever a P.A.

**Solução:** Escrevendo tudo em função do primeiro termo e da razão temos:

$$\begin{cases} a_1 + r + a_1 + 5r = 20 \\ a_1 + 3r + a_1 + 8r = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 6r = 20 \\ 2a_1 + 11r = 35 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, teremos $r = 3$ e $a_1 = 1$, logo a P.A. é: $(1, 4, 7, ...)$

$$\begin{cases} 2a_1 + 6r = 20 \\ 2a_1 + 11r = 35 \end{cases}$$

**Observação 2:** Quando o problema trata de termos consecutivos de uma P.A. é conveniente escrever em função do termo do meio:

— Para 3 termos: $(x - r, x, x + r)$

— Para 4 termos: $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$

## Fórmula da Soma dos N Termos de uma P.A.

**Propriedade 1:** Em uma P.A. finita com uma quantidade ímpar de termos, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao dobro do termo central.

**Exemplo 1:** Seja a P.A. (6, 10, 14, 18, 22, 26, 30). Notamos facilmente que:

$$a_1 + a_7 = 2a_4$$
$$a_2 + a_6 = 2a_4$$
$$a_3 + a_5 = 2a_4$$

**Fórmula da Soma**

Seja $S_n$ a soma dos n termos de uma P.A. então:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Escrevendo a soma de todos os termos do último até o primeiro e somando as expressões:

$$+\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 \end{cases}$$

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1)}_{\text{n parcelas}}$$

Lembrando da propriedade da soma dos extremos de uma P.A.:

$$(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = (a_3 + a_{n-2}) = \ldots = (a_n + a_1)$$

Reescrevendo a expressão da soma, aproveitando a consequência anterior:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

Assim, a soma dos n termos de uma P.A. é dada pela expressão:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \qquad (1.3)$$

**Exemplo 1:** Achar a soma dos 30 primeiros termos da P.A. $(2,5,\ldots)$.

**Solução:** Usando a equação (1.3):

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30})30}{2}$$

Falta calcular o trigésimo termo. Para isso, calculamos a razão:

$$r = 5 - 2$$
$$r = 3$$

E usamos este resultado:

$$a_{30} = a_1 + 29r \Rightarrow a_{30} = 2 + 29 \cdot 3 \Rightarrow a_{30} = 89$$

Finalmente:

$$S_{30} = \frac{(2 + 89)30}{2} \Rightarrow S_{30} = 91 \cdot 15$$
$$S_{30} = 1365$$

## Exercícios de Fixação

**1)** Determine o valor de x, tal que os números $x^2$, $(x+2)^2$ e $(x+3)^2$ formem nesta ordem uma P.A.

**2)** As medidas dos lados de um triângulo são expressas por $x+1$, $2x$ e $x^2 - 5$ estão em P.A. nesta ordem. Calcule o perímetro do triângulo.

**3)** Qual é o 15º termo da P.A. $(4,10,\ldots)$?

**4)** Numa P.A. de razão 5, o primeiro termo é 4. Qual a posição do termo igual a 44?

**5)** Qual é o primeiro termo de uma P.A. cujo sétimo termo é 46, sendo o termo precedente 39?

**6)** Quantos números inteiros existem, de 100 a 500, que não são divisíveis por 8?

**7)** Quantos termos aritméticos devemos interpolar entre 2 e 66 para que a razão da interpolação seja 8?

**8)** Numa P.A. o 8º termo é 16 e o 10º é igual a 20. Calcule o primeiro termo e a razão.

**9)** Numa P.A., $a_3 + a_6 = 29$ e $a_4 + a_7 = 35$. Escreva a P.A.

**10)** Ache três números em P.A. crescente, sabendo que a soma é 15 e o produto é 105.

**11)** Determine cinco números em P.A. crescente, sabendo que a sua soma vale 5 e o produto dos termos extremos é $-99$.

**12)** Ache a soma dos 40 primeiros termos da P.A. $(8, 2, \ldots)$

**13)** A soma dos seis termos consecutivos de uma P.A. é 12, e o último termo é 7. Determinar os termos da P.A.

**14)** Resolva a equação $2 + 5 + 8 + \ldots + x = 77$, sabendo que os termos do primeiro membro estão em P.A.

**15)** Quanto vale a soma dos seis primeiros da seqüência definida por $a_n = 2^{\frac{n-1}{2}}$, com $n \in \mathbb{N}^*$?

# Progressões Geométricas

## Definição

É uma seqüência de números não-nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo chamado de razão da progressão.

**Exemplo 1:** A sequência $(4, 8, 16, 32, 64)$, é uma P.G. de razão $q = 2$.

**Exemplo 2:** A sequência $(6, -18, 54, -162)$, é uma P.G. de razão $q = -3$.

## Representação da Progressão Geométrica (P.G.)

A representação matemática de uma P.G. é:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

Como sabemos que cada termo a partir do segundo é igual ao anterior multiplicado por uma razão q, podemos escrever:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{1.4}$$

E, como consequência da definição:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

**Exemplo 1:** Escreva uma P.G. de cinco termos em que $a_1 = 2$ e $q = 3$.
**Solução:** Pela definição (1.4) podemos escrever:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Como sabemos que $a_1 = 2$ podemos escrever os próximos termos:

$$a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 3 \Rightarrow a_2 = 6$$
$$a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow a_3 = 6 \cdot 3 \Rightarrow a_3 = 18$$
$$a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 = 18 \cdot 3 \Rightarrow a_4 = 54$$
$$a_5 = a_4 \cdot q \Rightarrow a_5 = 54 \cdot 3 \Rightarrow a_5 = 162$$

A P.G. é portanto: $(2, 6, 18, 54, 162)$.

## Fórmula do Termo Geral de uma P.G.

Seja $a_n$ um termo qualquer da progressão. Podemos então escrever cada termo, a partir do segundo, como o termo anterior multiplicado pela razão q:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow a_3 = \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 = \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3} \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n = \underbrace{a_1 \cdot q^{n-2}}_{a_{n-1}} \cdot q \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Definimos então o termo geral de uma P.G.:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{1.5}$$

**Exemplo 1:** Encontrar o termo geral da P.G.: $(2, 4, \ldots)$.
**Solução:** A partir do enunciado encontramos o primeiro termo e a razão:

$$a_1 = 2$$
$$q = \frac{4}{2} \Rightarrow q = 2$$

Substituindo o que encontramos na expressão do termo geral:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$$
$$a_n = 2^n$$

## Observações Sobre a Resolução de Problemas de P.G.

**Observação 1:** Às vezes, é conveniente colocar os termos em função de $a_1$ e de q, lembrando-se da fórmula do termo geral.
**Exemplo 1:** Numa P.G. o 2º termo é 8 e o 5º é 512. Escrever a P.G.
**Solução:** Do enunciado podemos escrever:

$$\begin{cases} a_2 = 8 \\ a_5 = 512 \end{cases}$$

Escrevendo cada um dos termos em função do primeiro termo:

$$\begin{cases} a_1 q = 8 \\ a_1 q^4 = 512 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior teremos:

$$q = 4 \text{ e } a_1 = 2$$

Logo, a P.G. será:

$$(2, 8, 32, 128, 512, \ldots)$$

**Observação 2:** Quando o problema trata de termos consecutivos de uma P.G. é conveniente escrever em função do termo do meio:

$$\left( \frac{x}{q}, x, xq \right)$$

**Exemplo 1:** A soma de três números em P.G. é 39 e o produto entre eles é 729. Calcular os números.
**Solução:** Usando os dados do enunciado e escrevendo os termos em função do termo central:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + xq = 39 \\ \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 729 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{q} + x + xq = 39 \\ x^3 = 729 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

Substituindo o valor de x na primeira equação:

$$\frac{9}{q} + 9 + 9q = 39$$

Fazendo o MMC, chegamos à equação do 2º grau abaixo:

$$9q^2 - 30q + 9 = 0$$

Que tem como soluções:

$$q = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 3 \\ q_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Os números são 3, 9, 27.

## Interpolação Geométrica

Interpolar meios geométricos é inserir termos entre dois termos dados, de modo a se obter uma P.G.
**Exemplo 1:** Interpolar três meios geométricos entre 3 e 48.
**Solução:** O problema consiste em formar uma P.G. em que: $(3, \_, \_, \_, 48)$.
Ou seja, $a_1 = 3$, $n = 5$ e $a_5 = 48$.
Da fórmula do termo geral (1.5) temos:

$$a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow 48 = 3q^4$$

$$q^4 = 16 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = -2 \end{cases}$$

Logo:

$$\text{Para } q = 2 \text{ a P.G. fica } (3, 6, 12, 24, 48).$$
$$\text{Para } q = -2 \text{ a P.G. fica } (3, -6, 12, -24, 48).$$

## Fórmula da Soma dos N Termos de uma P.G. Finita

Seja a P.G. finita:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

de razão **q** e de soma dos n termos igual a $S_n$. Queremos encontrar a soma:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

**1º Caso:** $q = 1$;

$$S_n = n \cdot a_1$$

**2º Caso:** $q \neq 1$;

Escrevendo cada termo em função do primeiro:

$$S_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

Multiplicando a equação por **q**:

$$S_n q = a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

Subtraindo a primeira equação da segunda ficamos com a expressão:

$$S_n - S_n q = a_1 - a_1 q^n$$

Que nos dá a expressão procurada:

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1} \tag{1.6}$$

**Exemplo 1:** Dada a P.G. $(1, 3, 9, 27, \ldots)$ calcular a soma dos 6 primeiros termos.

**Solução:** Da própria P.G. podemos extrair os seguintes dados:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = \dfrac{3}{1} \Rightarrow q = 3 \\ n = 6 \end{cases}$$

Usando a definição (1.6):

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_6 = \frac{1(3^6 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_6 = 364$$

## Fórmula da Soma dos Termos de uma P.G. Infinita

Seja a definição da soma dos n termos de uma P.G. finita:

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

O que queremos é que **n** seja muito grande (infinito). Na expressão anterior, se $|q| < 1$ teremos que $q^n$ será muito próximo de zero. Assim, usando estas aproximações, a soma dos termos de uma P.G. infinita pode ser calculada pela fórmula:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \tag{1.7}$$

Onde a razão **q** deve satisfazer: $-1 < q < 1$

**Exemplo 1:** Calcular a soma dos termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$.

**Solução:** Do enunciado podemos ver que:

$$q = \frac{1}{4} \text{ e } a_1 = 1$$

Aplicando a definição (1.7) temos:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \Rightarrow S = \frac{1}{\frac{4-1}{4}} \Rightarrow S = \frac{4}{3}$$

## Exercícios de Fixação

**16)** Determine o valor de x de modo que os números $x+1$, $x+4$ e $x+10$ formem, nesta ordem, uma P.G.

**17)** Sabe-se que numa P.G. a razão é 9, o primeiro termo é $\frac{1}{9}$ e o último termo é 729. qual o número de termos dessa P.G.?

**18)** Numa P.G. crescente, com 5 termos, $a_5 = 810$ e $a_3 = 90$. Escreva essa P.G.

**19)** Três números estão em P.G. crescente, de tal forma que sua soma é 130 e o produto é 27000. Calcule os três números.

**20)** Qual será a soma dos 20 primeiros termos de uma P.G. em que $a_1 = 1$ e $q = 2$?

**21)** Qual o valor da expressão $\dfrac{x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+\ldots}$?

**22)** Sabendo que os números 2, log x e log y estão simultaneamente em P.A. e P.G., calcule x e y.

**23)** A seqüência $(a, 2b-a, 3b, \ldots)$ é uma progressão aritmética, e a seqüência $(a, b, 3a+b-1, \ldots)$ é uma progressão geométrica. Calcule a e b.

**24)** Os números x, $\sqrt{x}$ e $\log_2(10x)$ são, nesta ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica. Calcule:

a) o primeiro termo;
b) o quinto termo;

**25)** Considere a seqüência definida por $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n \end{cases}$, válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Mostre que se trata de uma progressão geométrica de razão 3 e escreva uma expressão do termo geral.

b) Calcule $a_2, a_4$ e $a_6$.

# Gabarito

**1)** $x = \frac{1}{2}$
**2)** 24
**3)** 88
**4)** 9º
**5)** 4
**6)** 351
**7)** 7
**8)** $a_1 = 2$, $r = 2$
**9)** $(4, 7, 10, 13, \ldots)$
**10)** 3, 5 e 7
**11)** $(-9, -4, 1, 6, 11)$
**12)** 4360
**13)** $(-3, -1, 1, 3, 5, 7)$
**14)** $\{20\}$
**15)** $63\sqrt{2}$
**16)** 2
**17)** 5
**18)** $(10, 30, 90, 270, 810)$
**19)** $(10, 30, 90)$
**20)** $2^{20} - 1$
**21)** $x(x+1)$
**22)** $x = y = 100$
**23)** $a = -\frac{1}{3}$ e $b = -1$
**24)** a) $\frac{1}{5}$ b) 5
**25)** a) $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ b) 12, 108, 972