Colégio Naval 2002 (prova azul)

01) O número de múltiplos de 12 compreendidos entre 357 e 3578 é igual a

(A) 268 (B) 269 (C) 270 (D) 271 (E) 272

1ª SOLUÇÃO:

Seja A_K o número que denota a quantidade no intervalo $[1, N]$ de números que são divisíveis por k, tal que $A_K = \dfrac{[\![N]\!]}{k}$, onde $[\![\ ]\!]$ representa a parte inteira da divisão de N por k.

Podemos notar que no intervalo $[1, 357] \Rightarrow A_{12} = \dfrac{[\![357]\!]}{12} \Rightarrow$ existem 29 múltiplos de 12,

Do mesmo modo no intervalo $[1, 3578] \Rightarrow A_{12} = \dfrac{[\![3578]\!]}{12} \Rightarrow$ existem 298 múltiplos de 12,

Assim o número de múltiplos de doze no intervalo de 357 a 3578 é igual a 298 – 29 = 269

Ou podíamos ver que no intervalo $[357, 3578] \Rightarrow \left[\dfrac{357}{12}, \dfrac{3578}{12}\right] \Rightarrow [29{,}75;\ 298{,}16]$ ou seja, ver quantas soluções inteiras existem no intervalo, isto é, quantos números inteiros existem nesse intervalo $\Rightarrow [30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34, ...,\ 298] \Rightarrow 298 - 30 + 1 \Rightarrow 299 - 30 = 269$

Alternativa B

2ª SOLUÇÃO: temos que 360 é o primeiro termo da seqüência, o último termo é 3578 dividido por 12, cujo quociente é 298 e o resto é 2, logo 3578 – 2 = 3576 é divisível por 12.

Assim os números da seqüência são:

$\underbrace{(360;\ 372;\ 384;\ ...;\ 3576)}_{"n"\ números} \Rightarrow$ usando o conceito de Progressão Aritmética, temos:

$A_n = A_1 + (n-1) \times R$ onde A_n é um termo qualquer, A_1 é o primeiro termo, n é o número de termos e R é a razão ou diferença entre um termo qualquer e o termo anterior.

Logo: $A_n = 3576,\ A_1 = 360,\ R = 12$ e n = ?

$3576 = 360 + (n - 1) \times 12 \Rightarrow$ dividindo por 12

$298 = 30 + (n - 1) \Rightarrow n - 1 = 298 - 30 \Rightarrow n - 1 = 268 \Rightarrow n = 268 + 1$

n = 269

Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

02) Se o conjunto solução da inequação $3\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+10\le 0$ é S, então o número de elementos da interseção do conjunto S com o conjunto dos números inteiros é igual a

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 (E)4

1ª SOLUÇÃO:

$$3\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+10\le 0 \Rightarrow 3\cdot\left(\frac{x^4+1}{x^2}\right)-8\cdot\left(\frac{x^2+1}{x}\right)+\frac{10}{1}\le 0$$

$$\Rightarrow 3\cdot\left(\frac{x^4+1}{x^2\cancel{\,}_{1}}\right)-8\cdot\left(\frac{x^2+1}{x\cancel{\,}_{x}}\right)+\frac{10}{1\cancel{\,}_{x^2}}\le 0 \Rightarrow \frac{3\times\left(x^4+1\right)-8\times\left(x^3+x\right)+10x^2}{x^2}\le 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x^4+3-8x^3-8x+10x^2}{x^2}\le 0 \Rightarrow \frac{3x^4-8x^3+10x^2-8x+3}{x^2}\le 0$$

Observe que a soma dos coeficientes de $3x^4-8x^3+10x^2-8x+3$ é zero, isso indica que uma das raizes é um, logo divisível por (x - 1), assim fazendo a divisão encontramos $3x^4-8x^3+10x^2-8x+3 = (x-1)\times\left(3x^3-5x^2+5x-3\right)$

Do mesmo modo temos que $3x^3-5x^2+5x-3$ é divisível por $(x-1)$

Assim $3x^3-5x^2+5x-3=(x-1)\times\left(3x^2-2x+3\right)$

Logo $3x^4-8x^3+10x^2-8x+3 = (x-1)^2\times\left(3x^2-2x+3\right)$

Daí $\frac{3x^4-8x^3+10x^2-8x+3}{x^2}\le 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2\times\left(3x^2-2x+3\right)}{x^2}\le 0$

Observem que:

$a)(x-1)^2\ge 0$ (será zero quando x for igual a um)

$b)\left(3x^2-2x+3\right)>0$ pois delta é menor do que zero.

$c)x^2>0$ (pois está no denominador)

Como no problema é pedido menor ou igual a zero, temos que x = 1

Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

O polinômio $3x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 3$ podia ter sido fatorado da seguinte forma:

$$3x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 3 \Rightarrow \underbrace{3x^4 - 3x^3}\underbrace{-5x^3 + 5x^2}\underbrace{+5x^2 - 8x + 3}$$

$$\Rightarrow 3x^3(x-1) - 5x^2(x-1) + (x-1)(5x-3)$$

$$\Rightarrow (x-1)(3x^3 - 5x^2 + 5x - 3)$$

$$\Rightarrow (x-1)(3x^3 - 3 - 5x^2 + 5x)$$

$$\Rightarrow (x-1)\left[3(x^3-1) - 5x(x-1)\right]$$

$$\Rightarrow (x-1)\left[3(x-1)(x^2+x+1) - 5x(x-1)\right]$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-1)\left[3(x^2+x+1) - 5x\right]$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-1)\left[3x^2 + 3x + 3 - 5x\right]$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-1)\left[3x^2 - 2x + 3\right]$$

$$\Rightarrow (x-1)^2\left[3x^2 - 2x + 3\right]$$

2ª SOLUÇÃO:

$$3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 8 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 \le 0 \Rightarrow \text{seja } y = x + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow y^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

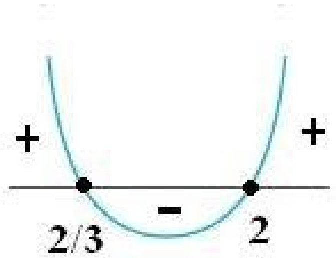
Assim $3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 8 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 \le 0 \Rightarrow 3 \cdot (y^2 - 2) - 8 \cdot (y) + 10 \le 0$

$$\Rightarrow 3y^2 - 6 - 8y + 10 \le 0 \Rightarrow 3y^2 - 8y + 4 \le 0$$

$$3y^2 - 8y + 4 \le 0 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 4 \Rightarrow \Delta = 64 - 48 \Rightarrow \Delta = 16$$

$$y = \frac{8 \pm 4}{6} \Rightarrow y_1 = \frac{8+4}{6} = \frac{12}{6} = 2 \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006



Assim $\frac{2}{3} \leq y \leq 2$ mas como $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x + \frac{1}{x} \leq 2$

Como "x" tem que ser inteiro $\Rightarrow \frac{2}{3} < x < 2 \Rightarrow x = 1$

Alternativa B

03) Se $a = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ e $b = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$, então *a*+*b* é igual a :

(A) $\sqrt{10}$ (B) 4 (C) $2\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{5} + 1$ (E) $\sqrt{3} + 2$

SOLUÇÃO:

Usando o produto notável $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, temos:

$$x = (a+b) \Rightarrow x^2 = (a+b)^2 \Rightarrow x^2 = \left(\sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\right)^2$$

$$x^2 = \left(\sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\right)^2 + 2 \times \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \times \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \left(\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\right)^2$$

$$x^2 = 4 \cancel{- \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + 2\left(\sqrt{16 - \left(10 + 2\sqrt{5}\right)}\right) + 4 \cancel{+ \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

$$x^2 = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \Rightarrow 2\sqrt{5} = 2 \times 1 \times \sqrt{5} \Rightarrow \left(\sqrt{5} - 1\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{5} + 1^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1$$

$$= 6 - 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \Rightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2} \Rightarrow x^2 = 8 + 2\left(\sqrt{5} - 1\right) \Rightarrow$$

$$x^2 = 8 + 2\sqrt{5} - 2 \Rightarrow x^2 = 6 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{\left(\sqrt{5} + 1\right)^2} \Rightarrow x = \sqrt{5} + 1$$

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

04) Se x e y são números inteiros e positivos, representa-se o máximo divisor comum de x e y por $MDC(x, y)$; assim, o número de pares ordenados (x, y) que são soluções do sistema

$$\begin{cases} x + y = 810 \\ mdc(x, y) = 45 \end{cases}$$

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 16 (E) 18

Temos que $\frac{x}{mdc(x,y)} = a$ e $\frac{y}{mdc(x,y)} = b$ onde "a" e "b" são primos entre si.

$$\Rightarrow \frac{x}{mdc(x,y)} + \frac{y}{mdc(x,y)} \Rightarrow \frac{x+y}{mdc(x,y)} = a + b \Rightarrow \frac{810}{45} = 18$$

Logo a + b = 18

Onde os valores possíveis para os pares ordenados são:

a	b		a	b	Serve ou não serve
1	17		17	1	Serve
2	16		16	2	não serve
3	15		15	3	não serve
4	14		14	4	não serve
5	13		13	5	Serve
6	12		12	6	não serve
7	11		11	7	Serve
8	10		10	8	não serve
9	9		X	X	não serve

Logo são seis os pares ordenados que são soluções do sistema.

Alternativa A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

05) Um relógio indica dois minutos menos do que a hora certa e adianta *t* minutos por dia. Se estivesse atrasado três minutos e adiantasse $\left(t+\frac{1}{2}\right)$ minutos por dia, então marcaria a hora certa exatamente um dia antes do que vai marcar. O tempo *t*, em minutos, que esse relógio adianta por dia está compreendido entre

(A) $\frac{1}{9} e \frac{2}{9}$ (B) $\frac{2}{9} e \frac{3}{9}$ (C) $\frac{4}{9} e \frac{5}{9}$ (D) $\frac{6}{9} e \frac{7}{9}$ (E) $\frac{8}{9} e \frac{9}{9}$

1ª SOLUÇÃO:

$$\begin{cases} \text{DIA} & \text{ADIANTA} \\ \text{1 dia } \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{t minutos} \quad \Rightarrow nt = 2 \Rightarrow n = \dfrac{2}{t} \\ \text{n dias} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{2 minutos} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{DIA} & \text{ADIANTA} \\ \text{1 dia } \_\_\_\_\_\_\_\_ & \left(t+\dfrac{1}{2}\right) \text{ minutos} \Rightarrow \left(t+\dfrac{1}{2}\right)m = 3 \Rightarrow m = \dfrac{3}{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)} \\ \text{m dias} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{3 minutos} \end{cases}$$

$$como\ m+1 = n \Rightarrow \frac{3}{\left(t+\frac{1}{2}\right)} + 1 = \frac{2}{t} \Rightarrow \frac{3}{\frac{2t+1}{2}} + 1 = \frac{2}{t} \Rightarrow \frac{6}{2t+1} + 1 = \frac{2}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{2t+1\diagup t} + \frac{1}{1\diagup 2t^2+t} = \frac{2}{t\diagup 2t+1} \Rightarrow 6t + 2t^2 + t = (2t+1)\times 2$$

$$\Rightarrow 6t + 2t^2 + t = 4t + 2 \Rightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow y^2 + 3y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = 1\ \ e\ \ y_2 = -4 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5\ \ e\ \ t_2 = \frac{-4}{2} = -2\,(\text{não serve})$$

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

2ª SOLUÇÃO:

Como o relógio está atrasado 2 minutos, em "n" dias com adiantamento de "t" minutos por dia a hora estará certa, isto é:

$n \times t = 2$ (1)

Do mesmo modo, se estivesse atrasado 3 minutos em "n-1" dias com adiantamento do relógio em "$\left(t+\frac{1}{2}\right)$" minutos a hora estará correta, ou seja:

$$(n-1)\times\left(t+\frac{1}{2}\right)=3 \Rightarrow nt+\frac{n}{2}-t-\frac{1}{2}=3 \Rightarrow 2nt+n-2t-1=6$$

$\Rightarrow 2nt+n-2t-7=0$ mas como $nt = 2$

$$\Rightarrow 4+n-2t-7=0 \Rightarrow n-2t-3=0 \Rightarrow n=2t+3 \text{ (2)}$$

Pondo (2) em (1), temos:

$$\Rightarrow (2t+3)\times t=2 \Rightarrow 2t^2+3t-2=0 \Rightarrow y^2+3y-4=0$$

$$\Rightarrow y_1=1 \;\; e \;\; y_2=-4 \Rightarrow t_1=\frac{1}{2}=0{,}5 \;\; e \;\; t_2=\frac{-4}{2}=-2(\text{não serve})$$

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

06) Considere um triângulo e uma circunferência que passa pelos pontos médios dos seus três lados. Se X, Y e Z, (X < Y < Z) são as medidas dos arcos dessa circunferência, em graus, exteriores ao triângulo, então

(A) Z = 360° - y (B) Z = X + Y (C) X + Y +Z =180°

(D) X + Y =180° (E) Z = 2X + Y

Fazendo a figura de acordo com o enunciado e denotando os arcos conforme abaixo, temos:
O arco AO por Z; O arco AM por X; O arco PN por Y; O arco MP por B e
O arco NO por A.

Observe que o quadrilátero AMNO é inscritível, pois, ON é paralelo a AB e MN é paralelo a AC, assim AMNO é um retângulo, logo os ângulos opostos são suplementares.

Assim temos:

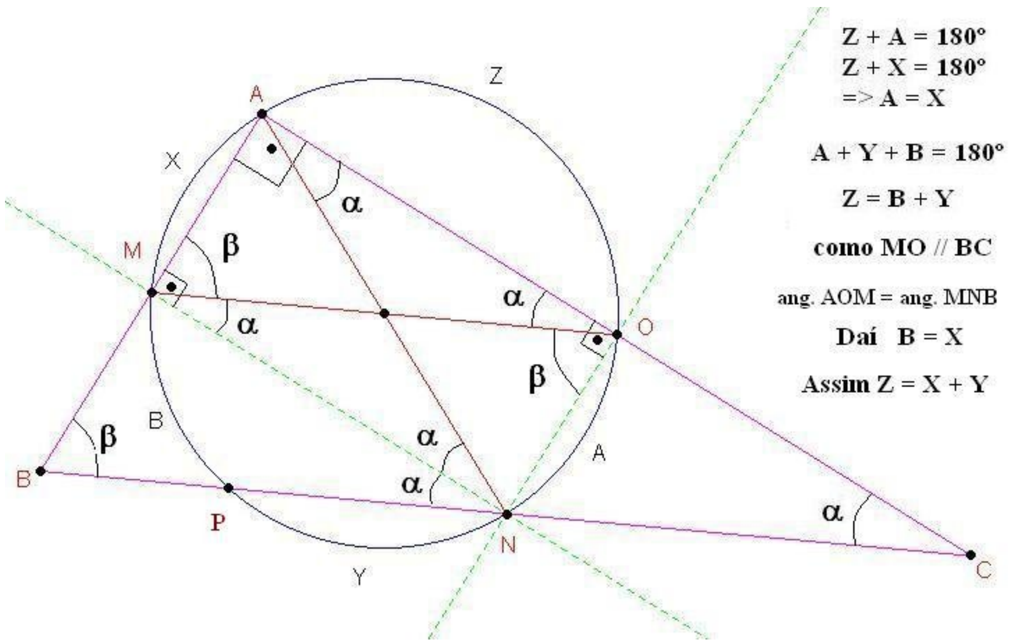
$Z + A = 180^\circ$ e $Z + X = 180^\circ \Rightarrow A = X$

$A + Y + B = 180^\circ \Rightarrow Z + A = A + Y + B \Rightarrow Z = Y + B$

Como MO é paralelo a BC, pois os pontos M e O são pontos médios, temos:

$A\hat{O}M = M\hat{N}B \Rightarrow$ arco MP = arco AM $\Rightarrow B = X$

Daí, como $Z = Y + B \Rightarrow Z = X + Y$

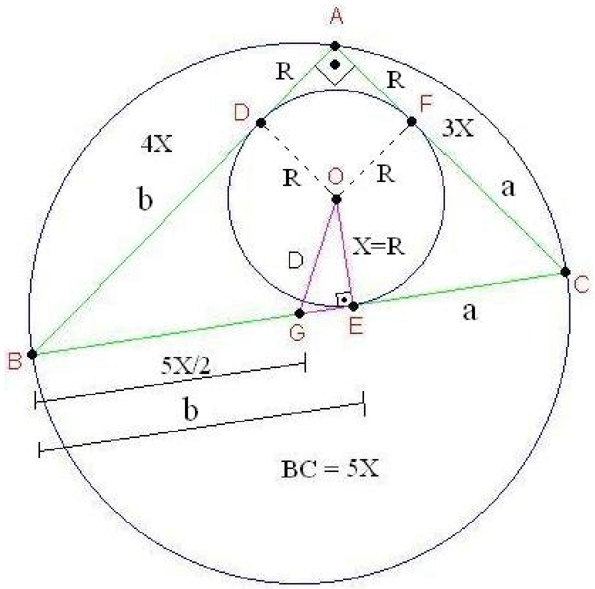


Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

07) Se os lados de um triângulo medem, respectivamente 3X, 4X e 5X, em que X é um número inteiro positivo, então a distância entre os centros dos círculos inscritos e circunscritos a esse triângulo corresponde a

(A) $\frac{5x}{4}$ (B) $\frac{(1+\sqrt{2})x}{2}$ (C) $x\sqrt{2}$ (D) $\frac{x\sqrt{5}}{2}$ (E) $\frac{5x}{6}$



Sejam FC = a, EC = a, AF = R, AD = R, BD = b, BE = b.

Onde R é o raio do cículo inscrito.

$$\begin{cases} a + R = 3X \\ R + b = 4X \Rightarrow \text{como os lados são 3X, 4X e 5X, isso indica que o triângulo é retângulo.} \\ b + a = 5X \end{cases}$$

$$2a + 2R + 2b = 12X \Rightarrow a + R + b = 6X$$

Como R + b = 4X $\Rightarrow a + \underbrace{R + b}_{4x} = 6X \Rightarrow a = 2X$

De a + R = 3X $\Rightarrow$ R = X e de R + b = 4X $\Rightarrow$ b = 3X

$$GE = BE - BG = \Rightarrow GE = 3X - \frac{5X}{2} = \frac{6X - 5X}{2} \Rightarrow GE = \frac{X}{2}$$

Logo do triângulo OEG, temos:

$$D^2 = X^2 - \left(\frac{X}{2}\right)^2 \Rightarrow D^2 = X^2 - \frac{X^2}{4} \Rightarrow D^2 = \frac{5X^2}{4}$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{\frac{5X^2}{4}} \Rightarrow D = \frac{X\sqrt{5}}{2}$$

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

Observações sobre a questão 07:

Se o triângulo for retângulo o raio do círculo inscrito é igual ao semi-perímetro menos a hipotenusa ou $\boxed{r = P - a}$

Teorema: Em todo triângulo retângulo, a soma dos catetos é igual a soma dos diâmetros dos círculos incrito e circunscrito ou seja $\boxed{b + c = 2r + 2R}$

Se o triângulo retângulo tem os lados iguais a 3R, 4R e 5R, então os lados estão em Progressão aritmética, daí o raio do círculo inscrito é igual a razão (ou diferença entre dois lados consecutivos) ou r = Razão.

O problema poderia ter sido resolvido usando o teorema abaixo:

Em qualquer triângulo à distância "D" do centro do círculo inscrito tendo "r" como raio, ao centro do círculo circunscrito de raio R é dado pela relação.

$$D = \sqrt{R \times (R - 2r)}$$

Resolvendo o problema fazendo uso das observações acima temos:

Como o triângulo tem os lados iguais a 3X, 4X e 5X $\Rightarrow$ r = X (raio do círculo inscrito)

Sendo o triângulo retângulo, então 2R = 5X (o diâmetro é igual a hipotenusa), assim:

Usando a fórmula $D = \sqrt{R \times (R - 2r)} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{5X}{2} \times \left(\frac{5X}{2} - 2X\right)}$

$$\Rightarrow D = \sqrt{\frac{5X}{2} \cdot \left(\frac{5X}{2} - \frac{4X}{2}\right)} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{5X}{2} \cdot \frac{X}{2}} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{5X^2}{4}} \Rightarrow D = \frac{X\sqrt{5}}{2}$$

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

08)

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Observe o quadrado acima em que as letras representam números naturais distintos desde 1 até 9. Se a adição de três números de cada linha, de cada coluna ou de cada diagonal, desse quadrado, tem sempre o mesmo resultado, então a letra E representa o número:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Solução:

Primeiramente temos:

$a+b+c+d+e+f+g+h+i=x$

Observe que, como a, b, c, d, e, f, g, h, i são números distintos que variam de 1 a 9, então:

Como 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 $\Rightarrow a+b+c+d+e+f+g+h+i=45$

Do mesmo modo, temos que:

$$a+b+c=d+e+f=g+h+i \Rightarrow a+b+c=d+e+f=g+h+i=\frac{45}{3}=15$$

Por outro lado temos:

$$\begin{cases} a+e+i=15 \\ c+e+g=15 \\ b+e+h=15 \\ d+e+f=15 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(a+b+c=d+e+f=g+h+i)}_{45}+3e=60 \Rightarrow 45+3e=60$$

$$\Rightarrow 3e=60-45 \Rightarrow 3e=15 \Rightarrow e=5$$

Alternativa E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarloslouriero@hotmail.com
(21) 8518-7006

09) Justapondo-se os números naturais conforme a representação abaixo, onde o sinal * indica o último algarismo, forma-se um número de 1002 algarismos.

1234567891011121314151617181920212223..................*

O resto da divisão do número formado por 16 é igual a

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

Solução:

Temos que:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{De 1 à 9 } \Rightarrow 9\text{-}1\text{+}1 = 9 \text{ algarísmos} \\ \text{De 10 à 99 } \Rightarrow \ 99\text{-}10\text{+}1\text{=}90 \ \Rightarrow 90 \times 2\text{=}180 \text{ algarísmos}\end{array}\right. \Rightarrow 189 \text{ algarísmos}$$

Logo 1002 - 189 = 813 algarísmos $\Rightarrow 813 \div 3 = 271$ números

Assim, sendo X um número de três algarísmos, temos:

$X - 100 + 1 = 271 \Rightarrow X = 271 + 100 - 1 \Rightarrow X = 370$

Daí a seguência de números 1234567891011...368369370

Fato teórico:

Um número é divisível por dois se é par e um número é par se o último algarísmo a direita for divisível por dois ou seja é par (algarismo das unidades).

Um número é divisível por quatro guando os dois últimos algarísmos da direita for divisível por quatro (algarísmos das unidades e das dezenas).

Um número é divisível por oito quando os três últimos algarísmos da direita for divisível por oito (algarísmos das unidades, das dezenas e das centenas).

Podemos mostrar que isso vale para dezesseis, isto é:

Um número é divisível por dezesseis se os quatro últimos algarísmos da direira for divisível por dezesseis.

Então $16 \mid 1234567891011...368369370 \Rightarrow 16 \mid 9370$

Que tem como resto 10

Alternativa E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

10) Se $2x + y = 1$, com X e Y reais, então o maior valor da expressão $x^2 + 3xy + y^2$ é igual a

(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{7}{4}$ (C) $\frac{13}{8}$ (D) $\frac{17}{8}$ (E) $\frac{31}{16}$

Solução:

$$(2x+y)^2 = 1^2 \Rightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 3xy + y^2 + x^2 + 2x^2 + xy = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(x^2 + 3xy + y^2\right)}_{K} + x^2 + \underbrace{\left(2x^2 + xy\right)}_{x\cdot\underbrace{(2x+1)}_{1}} = 1 \Rightarrow x^2 + x + K = 1 \Rightarrow K = x^2 + x - 1$$

O maior valor de $K = x^2 + x - 1,$ onde K é $K(x) = x^2 + x - 1,$ ou seja

K é função de x *ou* depende do valor de $x,$ esse valor é obtido quando $K = \frac{-\Delta}{4a}.$

Assim fazendo as contas, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-1) \Rightarrow \Delta = 5$$

$$\Rightarrow K = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow K = \frac{5}{4\cdot 1} = \frac{5}{4}$$

Alternativa A

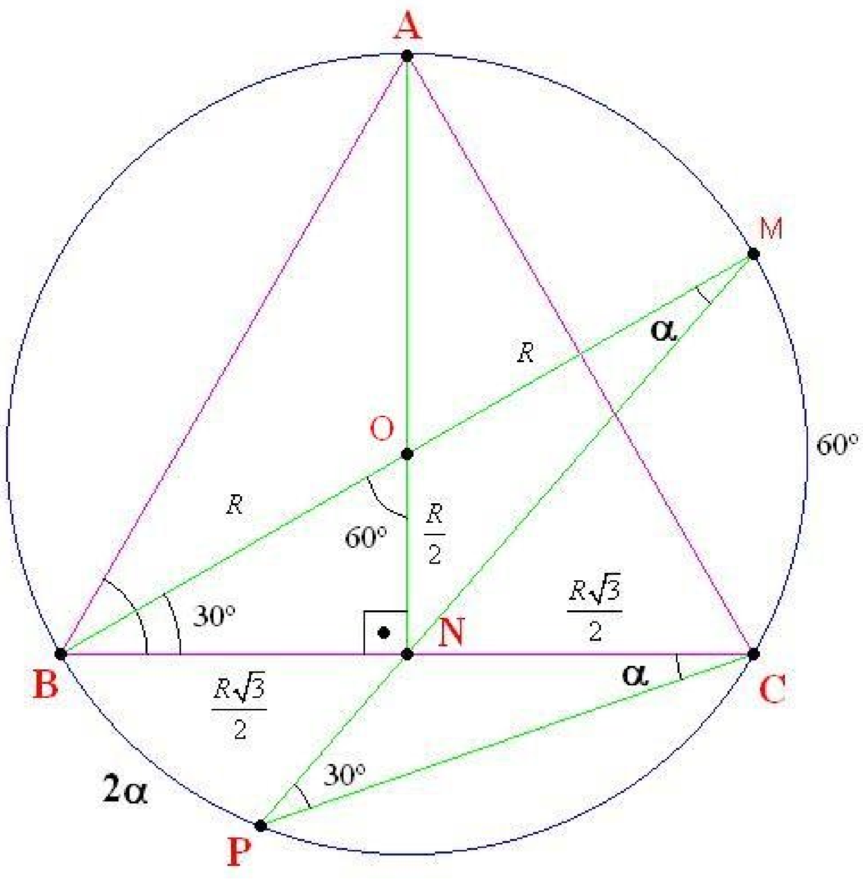
Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

11) Considere um triângulo eqüilátero ABC, inscrito em um círculo de raio R . Os pontos M e N são, respectivamente, os pontos médios do arco menor AC e do segmento $\overline{BC}$. Se a reta MN também intercepta a circunferência desse círculo no ponto P, P≠M, então o segmento $\overline{NP}$ mede

(A) $\frac{R\sqrt{7}}{2}$ (B) $\frac{3R\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3R\sqrt{7}}{14}$ (D) $\frac{R\sqrt{5}}{7}$ (E) $\frac{R\sqrt{5}}{3}$

Fazendo a figura conforme o enunciado, ligando os pontos B e M, P e C, A e N, temos a figura abaixo:

Observe que o triângulo BNO é retângulo com ângulos de 30º, 60º e 90º, como BO é igual ao Raio, denotado por R, temos que o lado oposto ao ângulo de 30º é igual à metade da hipotenusa e o lado oposto ao ângulo de 60º é igual a metade da hipotenusa vezes a raiz de três.Os ângulos MBN e NPC são congruentes pois são metade do arco MC, do mesmo modo os ângulos BMN e PCN são congruentes pois são metade do arco BP, logo os triângulos PCN e BMN são semelhantes, daí:



Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

$\frac{PN}{BN}=\frac{NC}{MN}$, mas antes de continuar temos que determinar MN, assim:

$$\mathrm{MN}^2=(2R)^2+\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\times 2R\times\frac{R\sqrt{3}}{2}\times\cos\ 30^{\circ}$$

$$\mathrm{MN}^2=4R^2+\frac{3R^2}{4}-\cancel{2}\times\cancel{2}R\times\frac{R\sqrt{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$\mathrm{MN}^2=4R^2+\frac{3R^2}{4}-3R^2\Rightarrow\mathrm{MN}^2=R^2+\frac{3R^2}{4}\Rightarrow$$

$$\mathrm{MN}^2=\frac{4R^2}{4}+\frac{3R^2}{4}\Rightarrow\mathrm{MN}^2=\frac{7R^2}{4}\Rightarrow\mathrm{MN}=\sqrt{\frac{7R^2}{4}}\Rightarrow\mathrm{MN}=\frac{R\sqrt{7}}{2}$$

Daí, temos:

$$\frac{PN}{BN}=\frac{NC}{MN}\Rightarrow\frac{PN}{\frac{R\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{\cancel{R}\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{R}\sqrt{7}}{\cancel{2}}}\Rightarrow PN=\frac{\sqrt{3}\times\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}\Rightarrow PN=\frac{9R}{2\sqrt{7}}$$

$$PN=\frac{9R}{2\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\Rightarrow PN=\frac{9R\sqrt{7}}{14}$$

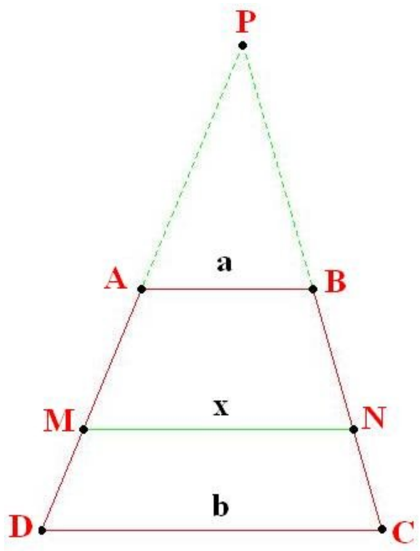
Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

12) Em um trapézio cujas bases medem A e B, os pontos M e N pertencem aos lados não-pararelos. Se o segmento $\overline{MN}$ divide esse trapézio em dois outros trapézios equivalentes, então a medida do segmento $\overline{MN}$ corresponde a

(A) média aritmética de A e B.
(B) média geométrica das bases.
(C) raiz quadrada da média aritmética de A^2 e B^2.
(D) raiz quadrada da média harmônica de A^2 e B^2.
(E) média harmônica de A e B.

Fazendo a figura conforme o enunciado, prolongando os lados não paralelos AD e BC de tal maneira que o ponto "P" seja a interseção desses prolongamentos, temos, assim construído três triângulos semelhantes, saber:



$\Delta ABP \sim \Delta MNP \sim \Delta DCP$ (semelhantes), assim:

$$\frac{S_{ABP}}{a^2} = \frac{S_{MNP}}{x^2} = \frac{S_{DCP}}{b^2} = k \Rightarrow \begin{cases} S_{ABP} = a^2 \times k \\ S_{MNP} = x^2 \times k \\ S_{DCP} = b^2 \times k \end{cases}$$

A área do trapézio ABMN pode ser dada por $S_{MNP} - S_{ABP}$

Do mesmo modo a área de MNCD pode ser dada por $S_{DCP} - S_{MNP}$

Como essas áreas são equivalentes temos:

$$S_{MNP} - S_{ABP} = S_{DCP} - S_{MNP} \Rightarrow 2 \times S_{MNP} = S_{DCP} + S_{ABP}$$

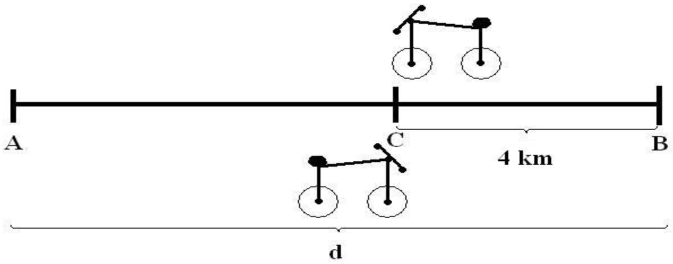
$$2 \times x^2 \times k = b^2 \times k + a^2 \times k \Rightarrow 2x^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Alternativa C

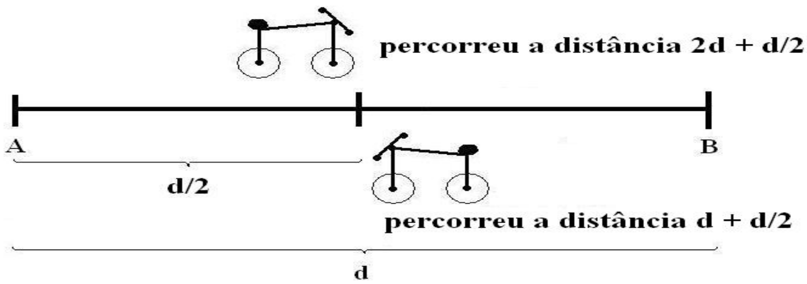
Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

13) Dois ciclistas, com velocidades constantes, porém diferentes, deslocam-se em uma estrada retilínea que liga os pontos A e B. Partem de A no mesmo instante e quando alcançam B, retornam a A, perfazendo o movimento A-B-A-B, uma única vez. Quando o mais veloz alcança o ponto B, pela primeira vez, retorna no sentido de A encontrando o outro a 4 km de B. Quando o mais lento atinge o ponto B, retorna imediatamente e reencontra, no meio do percurso, o outro que está vindo de A. Desprezando-se o tempo gasto em cada mudança no sentido de percurso, a distância entre os pontos A e B, em km, é igual a

(A) 10 (B)12 (C)14 (D)16 (E) 18



$$V_x = \frac{d+4}{t} \text{ e } V_y = \frac{d-4}{t} \Rightarrow \frac{V_x}{V_y} = \frac{\frac{d+4}{t}}{\frac{d-4}{t}} \Rightarrow \frac{V_x}{V_y} = \frac{d+4}{d-4} \quad (1)$$



$$V_x = \frac{2d + \frac{d}{2}}{t_1} \text{ e } V_y = \frac{d + \frac{d}{2}}{t_1} \Rightarrow \frac{V_x}{V_y} = \frac{\frac{2d+\frac{d}{2}}{t_1}}{\frac{d+\frac{d}{2}}{t_1}} \Rightarrow \frac{V_x}{V_y} = \frac{2d+\frac{d}{2}}{d+\frac{d}{2}} \Rightarrow \frac{V_x}{V_y} = \frac{\frac{5d}{2}}{\frac{3d}{2}} \Rightarrow \frac{V_x}{V_y} = \frac{5}{3} \quad (2)$$

De (1) e (2), temos:

$$\frac{d+4}{d-4} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3d + 12 = 5d - 20 \Rightarrow 2d = 32 \Rightarrow d = 16$$

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

14) Considere a equação $x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0$ com o parâmetro m inteiro não nulo. Se essa equação tem duas raízes reais e distintas com o número 4 compreendido entre essas raízes, então o produto de todos os possíveis valores de m é igual a

(A)-2 (B)-1 (C) 2 (D) 4 (E) 6

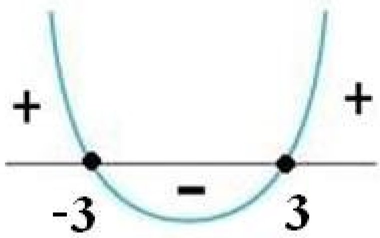
Solução:

Seja $\text{p(x)} = x^2 - 6x + \text{m}^2 - 1 \Rightarrow$ para $\text{x} = 4 \Rightarrow \text{p(4)} = 4^2 - 6 \cdot 4 + \text{m}^2 - 1$

$\Rightarrow \text{p(4)} = 16 - 24 + \text{m}^2 - 1 \Rightarrow \text{p(4)} = \text{m}^2 - 9$

Por teoria sabemos que a condição para um número α (alfa) estar entre as raízes do Trinômio do Segundo Grau, $p(x) = ax^2 + bx + c$ é que $\text{a} \times \text{p}(\alpha) < 0$.

Assim $\text{a} \times \text{p(4)} < 0$, como $\text{a} = 1 \Rightarrow \text{m}^2 - 9 < 0$



Logo $\text{m} \in (-3, 3)$, sendo que $\text{m} \neq 0$ pelo enunciado.

Daí "m" pode ser um dos valores do conjunto abaixo:

$\{-2, -1, 1, 2\}$

Assim o Produto $= (-2) \times (-1) \times (1) \times (2) = 4$

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

15) João vendeu dois carros de modelo SL e SR, sendo o preço de custo do primeiro 20% mais caro que o do segundo. Em cada carro teve um lucro de 20 % sobre os seus respectivos preços de venda. Se o total dessa venda foi R$ 88 000,00, o preço de custo do segundo modelo era, em reais, igual a

(A) 30 000,00 (B) 32 000,00 (C) 34 000,00

(D) 35 000,00 (E) 36 000,00

Solução:

Fato teórico: Venda com lucro – A venda de mercadorias pode oferecer um lucro e esse lucro pode ser sobre o preço de custo ou sobre o preço de venda.

Quando o lucro incidir sobre o PREÇO DE CUSTO, este valor será o principal, e como tal, corresponderá a 100%. Do mesmo modo quando o lucro incidir sobre o PREÇO DE VENDA, este valor será o principal, e como tal, corresponderá a 100%.

$$\begin{cases} \text{SL preço } 1{,}2\text{ X} \\ \text{SR preço X} \end{cases} \Rightarrow 1{,}2X + X = 2{,}2X$$

$$\begin{cases} 2{,}2\text{ X} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 80\% \\ 88000 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 100\% \end{cases} \Rightarrow 2{,}2X \times 100\% = 88000 \times 80\% \Rightarrow X = 32000$$

Alternativa E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

16) Se X é um número inteiro tal que $\sqrt{2x^2+3x-5} \le x+1$, o número de elementos do conjunto solução dessa inequação é igual a

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Solução:

$\sqrt{2x^2+3x-5} \le x+1 \Rightarrow$ antes de mais nada temos que $2x^2+3x-5 \ge 0$

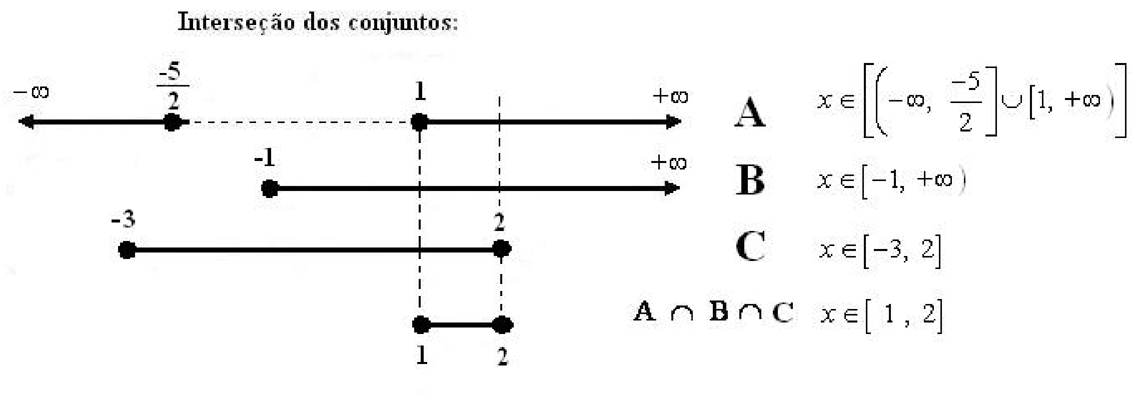
$\Rightarrow x \le \frac{-5}{2}$ *ou* $x \ge 1$ ou seja $x \in \left[\left(-\infty, \frac{-5}{2}\right] \cup [1, +\infty)\right]$ e

Do mesmo modo $x+1 \ge 0 \Rightarrow x \ge -1$ ou seja $x \in [-1, +\infty)$, feito isso, temos:

$$\left(\sqrt{2x^2+3x-5}\right)^2 \le (x+1)^2 \Rightarrow 2x^2+3x-5 \le x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow x^2+x-6 \le 0 \Rightarrow -3 \le x \le 2 \text{ ou seja } x \in [-3, 2]$$

.



Das condições acima e tendo em mente que "x" tem que ser inteiro, temos que $x \in \{1, 2\}$

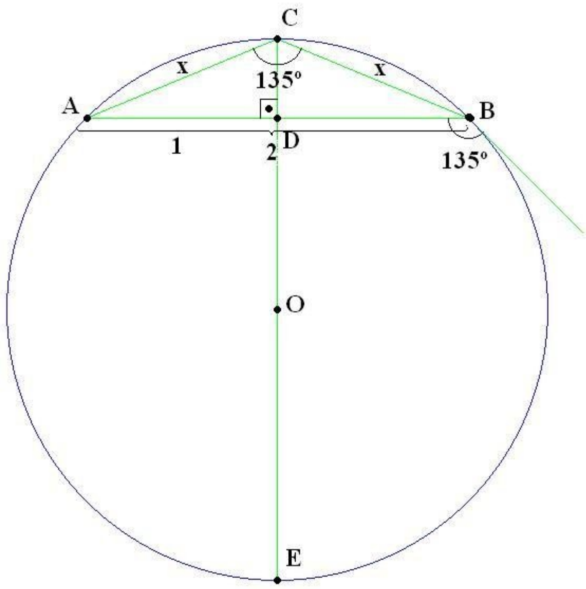
Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

17) Se um segmento $\overline{AB}$ tem 2 cm de comprimento, então a flecha do arco capaz de 135 ° desse segmento mede

(A) $\sqrt{2}+1$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}-1$ (D) $\sqrt{3}$ (E) $2-\sqrt{2}$

1ª SOLUÇÃO: Fazendo a figura conforme o enunciado, temos:



Arco Capaz de 135°

Do triângulo ABC, temos:

Usando a Lei dos cossenos $\Rightarrow 2^2 = x^2 + x^2 - 2\cdot x \cdot x \cdot \cos\ 135^o$

$$4 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow 4 = 2x^2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow 2 = x^2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow x^2 = \frac{4}{2+\sqrt{2}}$$

Agora vamos determinar o valor da flexa CD, observando o triângulo ACD, temos:

$$x^2 = CD^2 + 1^2 \Rightarrow CD^2 = \frac{4}{2+\sqrt{2}} - 1 \Rightarrow CD^2 = \frac{4-\left(2+\sqrt{2}\right)}{2+\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$CD^2 = \frac{4-2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \Rightarrow CD^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \Rightarrow CD^2 = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\times\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\times\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$\Rightarrow CD^2 = \frac{4-2\times 2\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{4-2} \Rightarrow CD^2 = \frac{4-4\sqrt{2}+2}{2} \Rightarrow CD^2 = \frac{6-4\sqrt{2}}{2}$$

$$CD^2 = 3-2\sqrt{2} \Rightarrow CD = \sqrt{3-2\sqrt{2}} \Rightarrow \text{Observe que } 2\sqrt{2} = 2\times 1\times\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$CD = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} \Rightarrow CD = \sqrt{2}-1$$

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro

Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ

Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA

Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA

PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática

PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática

professorcarlosloureiro@hotmail.com

(21) 8518-7006

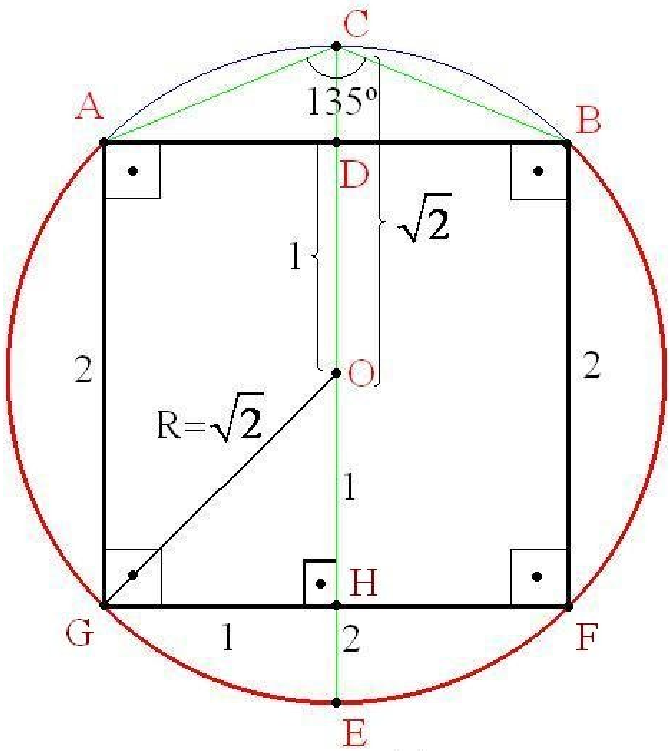
2ª SOLUÇÃO: Uma saída rápida para QUESTÃO 17 é observar que AB é o lado do quadrado inscrito, isto é:

$l_4 = R\sqrt{2} \Rightarrow R\sqrt{2} = 2 \Rightarrow R = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow R = \sqrt{2}$

Ou observando o triângulo HOG $\Rightarrow R^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow R^2 = 2 \Rightarrow R = \sqrt{2}$

Observe que DO é igual a metade do lado do quardrado ou seja igual a 1,

então como DC = $\underbrace{CO}_{\text{raio}}$ - DO $\Rightarrow$ DC = $\sqrt{2}$-1



$l_4 = R\sqrt{2}$

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

18) Se a, b, c são algarismos distintos, no sistema de numeração decimal existe um único número de dois algarismos (ab) tal que $(ab)^2 - (ba)^2 = (cc)^2$.
O valor de $(a + b + c)$ é igual a:

(A)11 (B)12 (C)13 (D)14 (E) 15

Solução:

$$(ab)^2 - (ba)^2 = (cc)^2 \Rightarrow (10a + b)^2 - (10b + a)^2 = (10c + c)^2$$
$$\Rightarrow [(10a + b + 10b + a) \times (10a + b - 10b - a)] = (10c + c)^2$$
$$\Rightarrow (11a + 11b) \times (9a - 9b) = (11c)^2$$
$$\Rightarrow 11(a + b) \times 9(a - b) = 11^2 c^2 \Rightarrow \cancel{11}(a + b) \times 9(a - b) = c^2 \times 11 \times \cancel{11}$$
$$\Rightarrow (a + b) \times (a - b) \times 9 = c^2 \times 11 \times 1$$
$$\Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 11 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 6 \text{ e } b = 5$$

Daí $a + b + c = 6 + 5 + 3 = 14$

Observações:

Se $c^2 = 9 \times (a + b) \Rightarrow (a - b) = 11 \Rightarrow a = 11 + b$

Daí $c = 3\sqrt{a + b} \Rightarrow c = \sqrt{11 + b + b} \Rightarrow c = \sqrt{11 + 2b}$ para ser quadrado perfeito $\Rightarrow b = 7$ (menor valor) $\Rightarrow c = 3 \times 5 \Rightarrow c = 15$ que não convém ao problema, pois a, b e c são algarismos (na base dez).

Se $c^2 = 9 \times (a - b) \Rightarrow (a + b) = 11 \Rightarrow a = 11 - b$

Daí $c = 3\sqrt{a - b} \Rightarrow c = 3\sqrt{11 - b - b} \Rightarrow c = 3\sqrt{11 - 2b}$ para ser quadrado perfeito, temos:

Se $b = 1 \Rightarrow c = 9$, mas se $b = 1 \Rightarrow a = 10$, não serve;

Se $b = 5 \Rightarrow c = 3$, mas se $b = 5 \Rightarrow a = 6$, daí $a + b + c = 6 + 5 + 3 = 14$ ok, serve ao problema.

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

19) Se a e b são dois números reais, denotarmos por $\min(a,b)$ o menor dos números a e b, isto é, $\min(a,b) = \begin{cases} a, \text{ se } a \le b \\ a, \text{ se } a \ge b \end{cases}$

O número de soluções inteiras negativas da inequação $\min(\ 2x\text{-}7,\ 8\ - 3x) > \ \text{-}\ 3x + 3$ é igual a

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Essa questão pelo erro de digitação $\min(a,b) = \begin{cases} a, \text{ se } a \le b \\ a, \text{ se } a \ge b \end{cases}$ estaria ANULADA.

Observação: Minha solução está sendo baseada na prova azul original e não digitação feita por terceiros.

Desconsiderando o erro, temos:

$\min(\ 2x\text{-}7,\ 8\ - 3x) > \ \text{-}\ 3x + 3$

a) se $2x - 7 \le 8 - 3x \Rightarrow 2x + 3x \le 8 + 7 \Rightarrow 5x \le 15 \Rightarrow x \le 3$

Resolvendo:

$2x - 7 > -3x + 3 \Rightarrow 5x > 10 \Rightarrow x > 2$ -, logo $2 < x \le 3$

b) se $2x - 7 \ge 8 - 3x \Rightarrow 2x + 3x \ge 8 + 7 \Rightarrow 5x \ge 15 \Rightarrow x \ge 3$

Resolvendo:

$8 - 3x > -\ 3x + 3 \Rightarrow 8 > 3$ isso é verdade qualquer que seja o valor de x,

mas como inicialmente $x \ge 3$.

Assim pelos itens a e b não existem soluções negativas.

Alternativa A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

20) Considere os triângulos ABC e MNP. Se as medidas dos lados do segundo triângulo são, respectivamente, iguais às medidas das medianas do primeiro, então a razão da área de MNP para a área de ABC é igual a

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{5}{6}$

1ª SOLUÇÃO: Supondo que ABC seja eqüilátero, temos:

$S_{ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ (1) que é a área de um triângulo equilátero qualquer.

Sabendo-se que em um triângulo equilátero todos os pontos notáveis se confundem (ou seja são coincidentes), temos que a mediana é a altura, bissetriz e mediatriz. Assim o lado do triângulo MNP (equilátero) é

$$\frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{usando a fórmula anterior } S_{MNP} = \frac{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{MNP} = \frac{\frac{l^2\, 3\sqrt{3}}{4}}{4} \Rightarrow S_{MNP} = l^2\,\frac{3\sqrt{3}}{16} \quad (2)$$

Daí e de (1) e (2), *vem*:

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{l^2\,\frac{3\sqrt{3}}{16}}{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{\cancel{l^2}\,\frac{3\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{16}\,4}}{\frac{\cancel{l^2}\,\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{4}}} \Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$$

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

2ª SOLUÇÃO: Seja um triângulo ABC qualquer, seja “G” o ponto de encontro das três medianas (baricentro), é sabido que o baricentro divide a mediana na razão dois pra um, desse modo podemos construir a figura abaixo. Outro fato importante é que o baricentro determina em qualquer triângulo seis triângulos que possuem a mesma área, isto é, se a área do triângulo ABC é S, então a área de cada um dos triângulos formados será S dividida por seis.
Seja “D” o ponto médio do segmento CG, ligando os pontos “D” e “N” e observando o triângulo ACG, podemos concluir que DN é paralelo a AG e sua medida é metade de AG, assim sendo o triângulo DNG tem os lados com medidas X, Y e Z. O triângulo MNP formado pelas medianas do triângulo ABC, tem lados cujas medidas são 3X, 3Y e 3Z, logo os triângulos DNG e MNP são semelhantes (caso LLL – lados proporcionais).

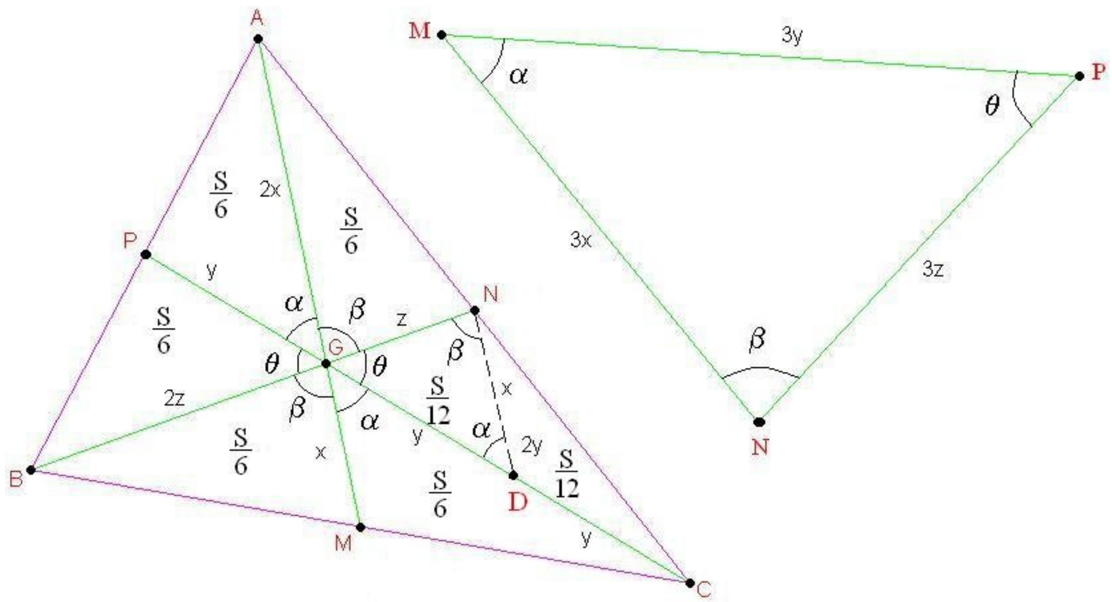
Da semelhança entre os triângulos DNG e MNP, temos:

$$\frac{S_{DNG}}{S_{MNP}} = \left(\frac{\cancel{x}}{3\cancel{x}}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{DNG}}{S_{MNP}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{DNG}}{S_{MNP}} = \frac{1}{9}$$

Mas $S_{DNG} = \frac{S}{12}$ pois á área de DNG é igual a metade da área do triângulo CNG.

Daí, $\frac{S_{DNG}}{S_{MNP}} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{MNP} = S_{DNG} \times 9 \Rightarrow S_{MNP} = \frac{S}{12} \times 9 = \frac{3S}{4}$

Como a área de ABC é S $\Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3S}{4}}{S} \Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3\cancel{S}}{4}}{\cancel{S}} = \frac{3}{4}$



Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006