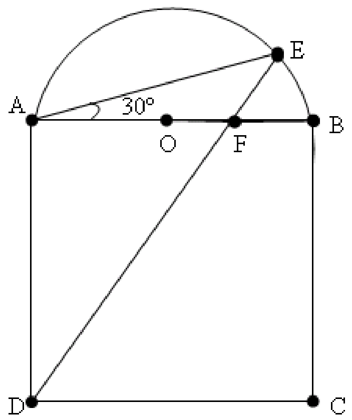
Colégio Naval 2004

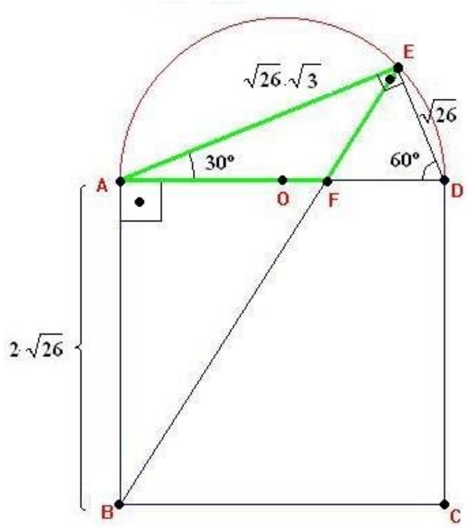
01)



Na figura acima , ABCD é um quadrado de área 104 e o ponto O é o centro do semicírculo de diâmetro AB. A área do triângulo AEF é dada por

(A) $2\left(3\sqrt{3}+3\right)$ (B) $6\left(4\sqrt{3}-3\right)$ (C) $5\left(4\sqrt{3}-6\right)$

(D) $3\left(4\sqrt{3}-3\right)$ (E) $8\left(4\sqrt{3}-3\right)$



$$S_{ABE} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\sqrt{26} \times \sqrt{26}\cdot\sqrt{3} \times sen\ 120^{º} \Rightarrow S_{ABE} = \overset{13}{\cancel{26}}\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 13 \times 3 = 39 \quad OBS: (sen\ 120^{º} = sen\ 60^{º} = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$S_{ABF} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\sqrt{26} \times AF \Rightarrow S_{ABF} = \sqrt{26} \times AF$$

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} \times AF \times \sqrt{26}\cdot\sqrt{3} \times sen\ 30^{º} \Rightarrow S_{AEF} = \left(\sqrt{26} \times AF\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow S_{AEF} = \left(\sqrt{26} \times AF\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

$$Como\ S_{ADE} = S_{ADF} + S_{AEF} \Rightarrow 39 = \sqrt{26} \times AF + \left(\sqrt{26} \times AF\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 39 = \left(\sqrt{26} \cdot AF\right) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 39 = \left(\sqrt{26} \cdot AF\right)\left(\frac{4+\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow \sqrt{26} \cdot AF = \frac{39}{4+\sqrt{3}\diagup 4} \Rightarrow \sqrt{26} \cdot AF = \frac{39 \cdot 4}{4+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\ como\ \ S_{AEF} = \left(\sqrt{26} \times AF\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{39 \cdot \cancel{4}}{4+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{39\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} \cdot \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$S_{AEF} = \frac{39 \cdot \left(4\sqrt{3} - 3\right)}{\underbrace{16-3}_{13}} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{\overset{3}{\cancel{39}} \cdot \left(4\sqrt{3} - 3\right)}{\cancel{13}} \Rightarrow S_{AEF} = 3 \cdot \left(4\sqrt{3} - 3\right)$$

Alternativa D

02)Um certo professor comentou com seus alunos que as dízimas periódicas podem ser representadas por frações em que o numerador e o denominador são números inteiros e ,neste momento, o professor perguntou aos alunos o motivo pelo qual existe a parte periódica. Um dos alunos respondeu justificando corretamente, que em qualquer divisão de inteiros

(A) o quociente é sempre inteiro.
(B) o resto é sempre inteiro.
(C) o dividendo é o quociente multiplicado pelo divisor, adicionado ao resto.
(D) os possíveis valores para resto têm uma quantidade limitada de valores.
(E) que dá origem a uma dízima, os restos são menores que a metade do divisor.

Item (A) $\Rightarrow$ Falso, pois, por exemplo 1 $\div$ 2 = 0,5

Obs: Isso é correto se não continuamos a divisão, mais não é esse o motivo.

Item (B) $\Rightarrow$ Falso, pois, por exemplo 4 $\div$ 3 = 1, 333... e o resto é igual a 0,001 aproximadamente

Obs: Do mesmo modo, isso é correto se não continuamos a divisão, mais não é esse o motivo.

Item (C) $\Rightarrow$ Falso, pois, apesar de correto, D = d $\times$ q + r, isso não é o motivo pelo qual da existência das dízimas periódicas.

Item (D) $\Rightarrow$ Correto, pois, o resto é sempre maior ou igual a zero e menor do que o quociente, ou seja, $0 \le$ resto<quociente, assim por exemplo na fração irredutível $\frac{2}{13}$, os restos possíveis serão: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \text{ e } 12\}$ ou seja $\frac{2}{13} = 0{,}15384615384615384615384615384 6153846$, observe que o resto nunca será zero, se não seria decimal exata.

Item (E) $\Rightarrow$ Falso, pois, por exemplo 13 $\div$ 7 $\Rightarrow$ quociente igual a 1 e o resto é igual a 6.

Obs: O Motivo da existência das DÍZIMAS PERIÓDICAS é a impossibilidade de se transformar uma fração ordinária em fração decimal, ou seja, a não possibilidade de transformação do denominador de algumas frações ordinárias em potência de dez, onde o denominador terá que ser após as transformações devidas da forma $\left(2^n \times 5^n\right) = 1\underbrace{000...0}_{n\ zeros}$.

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

03)Um professor de matemática apresentou um equação do 2ºgrau completa , com duas raízes reais positivas , e mandou calcular , as médias aritmética, geométrica e harmônica entre essas raízes , sem determiná-las. Nessas condições
(A) somente foi possível calcular a média aritmética.
(B) somente foi possível calcular as médias aritmética e geométrica.
(C) somente foi possível calcular as médias aritmética e harmônica.
(D) foi possível calcular as três médias pedidas.
(E) não foi possível calcular as três médias pedidas.

Resolvendo o problema, temos:

Média aritmética $\Rightarrow MA = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$, ou seja soma dos termos dividido pelo número de termos, no caso como são dois termos temos:

$MA = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ ou soma dos termos dividido por dois, assim $MA = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{S}{2}$

ou $MA = \dfrac{-b/a}{2} \Rightarrow MA = \dfrac{-b}{a} \times \dfrac{1}{2} \Rightarrow MA = \dfrac{-b}{2a}$

Média Geométrica $\Rightarrow MG = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \cdots \times x_n}$, para dois termos temos:

$MG = \sqrt{x_1 \times x_2}$, como os termos são positivos $\Rightarrow MG = \sqrt{x_1 \times x_2} = \sqrt{P} = \sqrt{\dfrac{c}{a}}$

Média Harmônica $\Rightarrow MH = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$, para dois termos temos:

$$MH = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}} \Rightarrow MH = \dfrac{2}{\dfrac{x_2}{x_1 \cdot x_2} + \dfrac{x_1}{x_1 \cdot x_2}} \Rightarrow MH = \dfrac{2}{\left(\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}\right)} \Rightarrow MH = \dfrac{2 \cdot (x_1 \cdot x_2)}{x_1 + x_2}$$

ou seja $MH = \dfrac{2 \cdot P}{S} \Rightarrow MH = \dfrac{2\left(c/a\right)}{-b/a} \Rightarrow MH = -\dfrac{2c}{b}$

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

04) Sabendo-se que a equação $x^2(x^2+13)-6x(x^2+2)+4=0$ pode ser escrita como um produto de binômios do primeiro grau , a soma de duas das suas raízes reais distintas é igual a

(A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) 2 (E) 3

Resolvendo o problema, temos:

$$x^2\left(x^2+13\right)-6x\left(x^2+2\right)+4=0 \Rightarrow x^4+13x^2-6x^3-12x+4=0$$

Teorema muito importante: Toda equação em que a soma dos coeficientes for ZERO, teremos necessariamente uma das raízes igual a UM.

Observando a equação anterior, isto é, $x^4+13x^2-6x^3-12x+4=0,$ temos que:

A soma dos coeficientes é S.C = 1 + 13 - 6 - 12 + 4 = 0, logo essa equação é divisível por $\left(x-1\right)$

Ordenando a equação e usando a regra das chaves temos:

$$x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-6x^3+13x^2-12x+4 & x-1 \\ \hline
-x^4+x^3 & x^3-5x^2+8x-4 \\
-5x^3+13x^2-12x+4 & \\
+5x^3-5x^2 & \\
8x^2-12x+4 & \\
-8x^2+8x+4 & \\
-4x+4 & \\
4x-4 & \\
0 &
\end{array}
$$

Assim, temos que:

$$x^4-6x^3+13x^2-12x+4=\left(x-1\right)\cdot\left(x^3-5x^2+8x-4\right)=0$$

Do mesmo modo observando a equação anterior, o fator $x^3-5x^2+8x-4=0,$ temos que:

A soma dos coeficientes é S.C = 1 - 5 + 8 - 4 = 0, logo essa equação é divisível por $\left(x-1\right)$

Fazendo a divisão como anteriormente, temos:

$$x^3-5x^2+8x-4=\left(x-1\right)\cdot\left(x^2-4x+4\right)$$

Agora do fator $x^2-4x+4=0 \Rightarrow x_1=2 \;\; e \;\; x_2=2 \Rightarrow x^2-4x+4=\left(x-2\right)\cdot\left(x-2\right)=\left(x-2\right)^2$

$Daí \quad x^4-6x^3+13x^2-12x+4=\left(x-1\right)^2\cdot\left(x-2\right)^2 \Rightarrow x_1=x_2=1 \;\; e \;\; x_3=x_4=2$

Logo a soma de duas raízes distintas é:

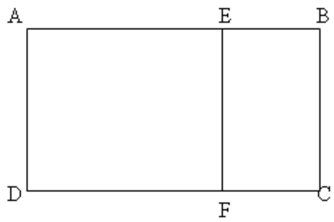
$Soma=2+1 \Rightarrow Soma=3$

(Observação: Um método melhor de se fazer a divisão é usar o Dispositivo Prático de Briot – Ruffini).

Alternativa E

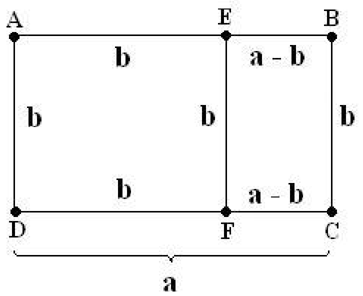
Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

05)



Um retângulo ABCD de lados AB=a e BC =b (a>b) ,é dividido, por um segmento EF ,num quadrado AEFD e num retângulo EBCF, semelhante ao retângulo ABCD conforme a figura acima. Nessas condições, a razão entre a e b é aproximadamente igual a

(A) -1,62 (B) 2,62 (C) 3,62 (D) 4,62 (E) 5,62



De acordo com o enunciado podemos montar a figura acima, assim temos:

I) Da semelhança entre os retângulos $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{EB} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Rightarrow b^2 = a\cdot(a-b)$

$\Rightarrow (a-b) = \frac{b^2}{a}$

II) Das áreas dos retângulos e do quadrado, temos:

$a\cdot b = b^2 + b\cdot(a-b)$

Assim de I e II $\Rightarrow a\cdot\cancel{b} = \frac{\cancel{b^2}}{\cancel{b}} + \cancel{b}\cdot\frac{b^2}{a} \Rightarrow a^2 = ab + b^2 \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$

Sendo "a" a variável $\Rightarrow \Delta = (-b)^2 - 4\cdot 1\cdot(-b^2) \Rightarrow \Delta = b^2 + 4b^2 \Rightarrow \Delta = 5b^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5b^2}$

$\sqrt{\Delta} = b\sqrt{5} \Rightarrow a = \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{b + b\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{b\cdot(\sqrt{5}+1)}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{b} = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{b} \cong \frac{2,23+1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{b} \cong \frac{3,23}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{b} \cong 1,62$

$De\ \ a_2 = \frac{b - b\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{b\cdot(1-\sqrt{5})}{2} \Rightarrow \frac{a_2}{b} = \frac{(1-\sqrt{5})}{2}$ não serve

Obs: O procedimento acima é uma das maneiras de chegarmos ao chamado **número de ouro**, ou divisão em média e extrema razão.

Alternativa A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

06) A interseção do conjunto solução, nos reais, da inequação $\dfrac{(x^2-2x+1)^2}{12x-4} \le 0$ com o conjunto $\{x \in R / x < 4\}$é dada por

(A) $\left\{x \in R / x < \dfrac{1}{3}\right\}$ (B) $\{x \in R / x < 0\}$ (C) $\left\{x \in R / x < \dfrac{1}{3}\right\} \cup \{2\}$

(D) $\left\{x \in R / x < \dfrac{1}{3}\right\} \cup \{1\}$ (E) $\{x \in R / x < 2\}$`

Resolvendo primeiramente a inequação, temos:

$\dfrac{(x^2-2x+1)^2}{12x-4} \le 0,$ sendo f(x)=$(x^2-2x+1)^2$ e g(x)=$12x-4$

Podemos notar que $\text{f(x)} \ge 0,$ ou seja sempre será positivo ou zero, como no problema se quer $\dfrac{\text{f(x)}}{\text{g(x)}} \le 0,$ temos que determinar o valor de f(x)=0 $\Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1,$ assim f(x) será zero em $x=1$ e positiva nos demais valores.

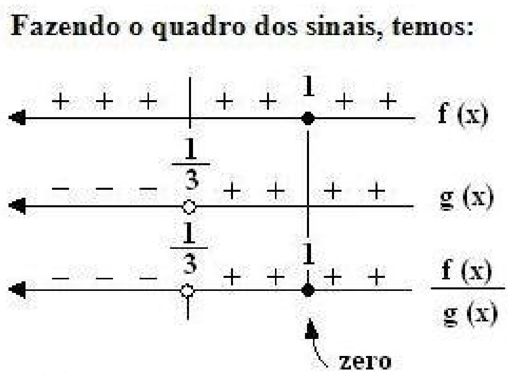
Agora vamos determinar o sinal de g(x), observe que g(x) não pode ser zero, daí $\text{g(x)} \ne 0$

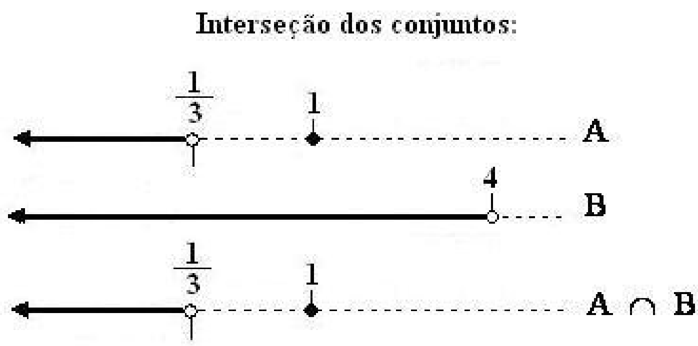
Como $\text{g(x)} < 0 \Rightarrow 12x-4<0 \Rightarrow 12x<4 \Rightarrow x<\dfrac{4}{12} \Rightarrow x<\dfrac{1}{3}$

Daí, quando $x<\dfrac{1}{3}$ ou $x=1 \Rightarrow \dfrac{\text{f(x)}}{\text{g(x)}} \le 0$ o conjunto solução será:

$A=\left\{x \in R / x<\dfrac{1}{3} \text{ ou } x=1\right\}$

A interseção do conjunto solução acima com, B = $\{x \in R / x < 4\}$, nos dá:



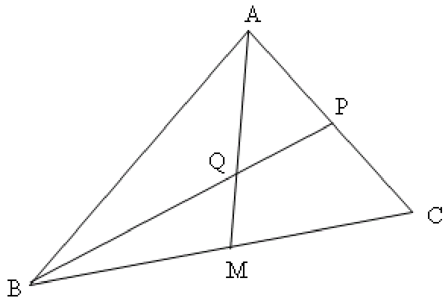


Assim A$\cap$B=$\left\{x \in \mathbb{R} / x<\dfrac{1}{3}\right\} \cup \{1\}$

Alternativa D

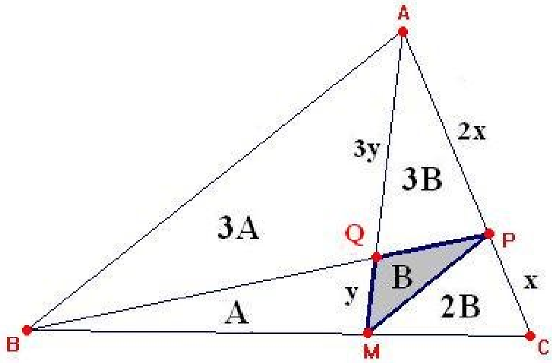
Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

07)



Na figura acima AM e BP são cevianas do triangulo ABC de área S. Sendo AP=2PC e AQ=3QM ,qual o valor da área do triângulo determinado pelos pontos P , Q e M ,em função de S?

(A) $\frac{S}{16}$ (B) $\frac{S}{18}$ (C) $\frac{S}{20}$ (D) $\frac{S}{21}$ (E) $\frac{S}{24}$



Solução:

Observando o triângulo ABM, temos:

$\text{Área}_{\Delta ABM} = \text{Área}_{\Delta ABQ} + \text{Área}_{\Delta QBM}$, como os triângulos ABQ e QBM possuem a mesma altura e a base AQ do ΔABQ é igual a três vezes a base QM do $\Delta QBM \Rightarrow \text{Área}_{\Delta ABQ} = 3\times\ \text{Área}_{\Delta QBM}$.

Seja "3A" a área do ΔABQ e "A" a área do ΔQBM (ver figura).

Ligue os pontos "P" e "M", formando assim o triângulo APM, observando esse triângulo, temos:

Do mesmo modo a $\text{Área}_{\Delta APM} = \text{Área}_{\Delta APQ} + \text{Área}_{\Delta QPM}$, como os triângulos ΔAPQ e ΔQPM possuem a mesma altura e a base AQ do ΔAPQ é igual a três vezes a base QM do ΔQPM

$\Rightarrow \text{Área}_{\Delta APQ} = 3\times\ \text{Área}_{\Delta QPM}$, seja "3B" a área do ΔAPQ e "B" a área do ΔQPM (ver figura).

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

Agora observando o triângulo AMC, temos:

Área$_{\Delta AMC}$ = Área$_{\Delta AMP}$ + Área$_{\Delta PMC}$, como os triângulos AMP e PMC possuem a mesma altura e a base AP do ΔAMP é igual a duas vezes a base PC do $\Delta PMC \Rightarrow$ Área$_{\Delta AMP}$ = $2\times$ Área$_{\Delta PMC}$

Como a área do $\Delta AMP = 4B \Rightarrow$ área do $\Delta PMC = 2B$. Observe que a área do triângulo PQM é igual B, isto é, Área$_{\Delta PQM}$ = B.

Do enunciado temos que área do $\Delta ABC = S$, mas a Área$_{\Delta ABC}$ = Área$_{\Delta ABP}$ + Área$_{\Delta PBC}$ como os triângulos ABP e PBC possuem a mesma altura e a base AP do ΔABP é igual a duas vezes a base PC do $\Delta PBC \Rightarrow$ Área$_{\Delta ABP}$ = $2\times$ Área$_{\Delta PBC}$, logo área do $\Delta ABP = \dfrac{2S}{3}$

e área do $\Delta PBC = \dfrac{S}{3}$

Observando a figura acima podemos montar o sistema abaixo:

$$\begin{cases} \text{Do triângulo ABP } \Rightarrow A+3B=\dfrac{S}{3} \\ \text{Do triângulo PBC } \Rightarrow 3A+3B=\dfrac{2S}{3} \Rightarrow A+B=\dfrac{2S}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+3B=\dfrac{S}{3} \\ A+B=\dfrac{2S}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2B=\frac{S}{3}-\frac{2S}{9} \Rightarrow 2B=\frac{3S}{9}-\frac{2S}{9} \Rightarrow 2B=\frac{S}{9} \Rightarrow B=\frac{S}{18}$$

Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

08) Considere o triângulo escaleno ABC e os pontos P e Q pertencentes ao plano de ABC e exteriores a esse triângulo . SE : as mediadas dos triângulos PAC e QBC são iguais ; as medidas dos ângulos PCA e QCB são iguais ; M é o ponto médio de AC ; N é o ponto médio de BC ; S_1 é a área do triângulo PAM ; S_2 é a área do triângulo QBN ; S_3 é a área do triângulo PMC ; e S_4 é área do triângulo QNC ,analise as afirmativas:

I - S_1 está para S_4 ,assim como S_3 está para S_2 .

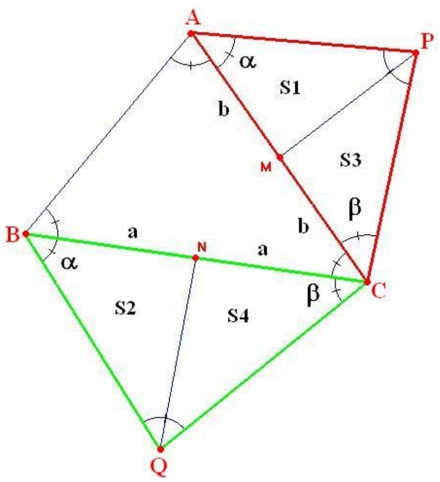
II - S_1 está para S_2 ,assim como $(PM)^2$ está para $(QN)^2$.

III - S_1 está para S_3 ,assim como S_2 está para S_4 .

Logo pode-se concluir ,corretamente ,que

(A) apenas a afirmativa 1 é verdadeira.
(B) apenas as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras .
(C) apenas as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras .
(D) apenas as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras .
(E) as afirmativas 1 ,2 e 3 são verdadeiras.

Fazendo a figura conforme o enunciado, temos:



Pela figura acima, temos:

Como PM é mediana do Δ APC $\Rightarrow S1 = S3$

Do mesmo modo, temos que QN é mediana do Δ AQC $\Rightarrow S2 = S4$ ou $S4 = S2$

Daí dividindo membro a membro temos:

$\frac{S1}{S4} = \frac{S3}{S2}$, assim a afirmativa I é correta.

Os triângulos APC e BQC são semelhantes, assim:

$$\frac{S1+S3}{S2+S4} = \left(\frac{PM}{QM}\right)^2, \text{ mas } S1 = S3 \text{ e } S2 = S4 \Rightarrow \frac{S1+S1}{S2+S2} = \left(\frac{PM}{QM}\right)^2 \Rightarrow \frac{\cancel{2}S1}{\cancel{2}S2} = \frac{PM^2}{QM^2} \Rightarrow \frac{S1}{S2} = \frac{PM^2}{QM^2}$$

assim a afirmativa II é correta.

De $\frac{S1}{S2} = \frac{PM^2}{QM^2} = \frac{S3}{S4} \Rightarrow \frac{S1}{S2} = \frac{S3}{S4} \Rightarrow \frac{S1}{S3} = \frac{S2}{S4}$ assim a afirmativa III é correta.

Alternativa E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

09) Uma máquina é capaz de fabricar ,ligada durante um tempo inteiro de minutos T , 3^T peças ,sendo que 20% delas são defeituosas . Para obter-se, no mínimo, 605 peças perfeitas essa máquina deverá funcionar quantos minutos ?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Resolvendo a questão, temos:

T minutos __________ 3^T peças $\Rightarrow$ 3 minutos __________ 3^3 peças = 27peças

605 __________ 80%

x __________ 100% $\Rightarrow$ $x = \dfrac{605 \cdot 10\cancel{0\%}}{8\cancel{0\%}} = \dfrac{6050}{8} \cong 756$

As potências de três são:

$3^0 = 1,\ 3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27,\ 3^4 = 81,\ 3^5 = 243,\ 3^6 = 729,\ 3^7 = 2187$

Logo deverá funcionar sete minutos.

Alternativa D

10) Um número natural N tem 2005 divisores positivos.Qual é o número de base distintas da sua decomposição em fatores primos?

(A) Um. (B) Dois. (C) Três. (D) Quatro. (E) Cinco.

Resolvendo, temos:

se N = a^{2004} $\Rightarrow$ número de divisores de n = 2004 + 1 = 2005 (onde "a" é um fator primo qualquer).

se N = $a^4 \times b^{400}$ $\Rightarrow$ número de divisores de n = $(4+1) \times (400+1)$ = 5×401=2005,
(onde "a" e "b" são fatores primos quaisquer).

Essa questão pelo exposto acima teria duas respostas, a meu ver a questão está ANULADA.
Obs.:Não sei o gabarito após recursos.

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

11) Um aluno resolvendo uma questão de múltipla escolha chegou ao seguinte resultado $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}$,no entanto as opções estavam em números decimais e pedia-se a mais próxima do valor encontrado para resultado , e , assim sendo , procurou simplificar esse resultado, a fim de melhor estimar a resposta .Percebendo que o radicando da raiz de índice 4 é quarta potência de uma soma de dois radicais simples , concluiu, com maior facilidade, que a opção para a resposta foi

(A) 3,00 (B) 3,05 (C) 3,15 (D) 3,25 (E) 3,35

1ª SOLUÇÃO:

Usando a fórmula $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}}$, onde $C^2 = A^2 - B$, temos:

Observe que $\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt{\sqrt{49 + 20\sqrt{6}}}$, assim:

$$\sqrt{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt{49 + \sqrt{6 \times 400}} = \sqrt{49 + \sqrt{2400}} \Rightarrow C^2 = 49^2 - 2400 \Rightarrow C^2 = 2401 - 2400$$

$$C^2 = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\sqrt{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt{49 + \sqrt{2400}} = \sqrt{\frac{49 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{49 - 1}{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} + \sqrt{\frac{48}{2}} = \sqrt{25} + \sqrt{24}$$

$\sqrt{25} + \sqrt{24} = 5 + \sqrt{24}$ daí

$$\sqrt{5 + \sqrt{24}} \Rightarrow C^2 = 5^2 - 24 \Rightarrow C^2 = 25 - 24 \Rightarrow C = 1$$

Assim $\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{5 - 1}{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \cong 1,73 + 1,41 \cong 3,14$

2ª SOLUÇÃO:

Notando que $\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt{\sqrt{49 + 20\sqrt{6}}}$ e usando o produto notável $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

Temos que determinar "a" e "b" tais que, $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$\Rightarrow 20\sqrt{6} = 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{6} = 2 \cdot \underbrace{5}_{a} \cdot \underbrace{2\sqrt{6}}_{b} \Rightarrow \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^2 = 49 + 20\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt{\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^2} = 5 + 2\sqrt{6}$$

De $2\sqrt{6} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 2 \cdot \underbrace{\sqrt{2}}_{a} \cdot \underbrace{\sqrt{3}}_{b} \Rightarrow \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Daí $\sqrt{2} + \sqrt{3} \cong 1,73 + 1,41 \cong 3,14$

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

12) Se $\underline{a}$, $\underline{b}$,$\underline{c}$ e $\underline{d}$ são números reais <u>não</u> nulos tais que $ad^2 + bc^2 = 0$,pode-se afirmar que

(A) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}; b+d \neq 0$

(B) $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}; c+d \neq 0$

(C) $\frac{a}{d} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c+d}; c+d \neq 0$

(D) $\frac{c}{a} + \frac{b}{d} = \frac{b+c}{a+d}; a+d \neq 0$

(E) $\frac{c}{b} + \frac{d}{a} = \frac{c+d}{a+b} = a+b \neq 0$

1ª SOLUÇÃO:

Esse tipo de questão em concurso, muitas vezes faz o aluno perder tempo, vamos usar um método que em geral resolve o problema:

Vamos "CARTEA ALGUNS VALORES" para "a", "b", "c" e "d" de acordo com a expressão

$ad^2 + bc^2 = 0$ ou $ad^2 = -bc^2 \Rightarrow$ sendo a = 4, b = -1, c = 6 e d = 3, temos:

Colocando esses valores na alternativa A:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d};\ b+d \neq 0 \Rightarrow \frac{4}{-1} + \frac{6}{3} = -4 + 2 = -2$$

$\frac{a+c}{b+d} = \frac{4+6}{-1+3} = \frac{10}{2} = 5$ vemos que são diferentes os valores encontrados.

Colocando esses valores na alternativa B:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d};\ c+d \neq 0 \Rightarrow \frac{4}{6} + \frac{-1}{3} = \frac{4}{6} + \frac{-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$\frac{a+b}{c+d} = \frac{4+(-1)}{6+3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ vemos que esses valores encontrados são iguais (já é a resposta).

Colocando esses valores na alternativa C:

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c+d};\ c+d \neq 0 \Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{-1}{6} = \frac{8}{6} + \frac{-1}{6} = \frac{7}{6}$$

$\frac{a+b}{c+d} = \frac{4+(-1)}{6+3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ vemos que são diferentes os valores encontrados.

Colocando esses valores na alternativa D:

$$\frac{c}{a} + \frac{b}{d} = \frac{b+c}{a+d};\ a+d \neq 0 \Rightarrow \frac{6}{4} + \frac{-1}{3} = \frac{18}{12} + \frac{-4}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

$\frac{b+c}{a+d} = \frac{-1+6}{4+3} = \frac{5}{7}$ vemos que são diferentes os valores encontrados.

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

Colocando esses valores na alternativa E:

$$\frac{c}{b} + \frac{d}{a} = \frac{c+d}{a+b};\ a+b \neq 0 \Rightarrow \frac{6}{-1} + \frac{3}{4} = -\frac{24}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{21}{4}$$

$$\frac{c+d}{a+b} = \frac{6+3}{4+(-1)} = \frac{9}{3} = 3$$ vemos que são diferentes os valores encontrados.

Alternativa B

2ª SOLUÇÃO:
Observando atentamente as respostas podemos notar que elas são semelhantes, só variando porque ora uma letra é numerador, ora denominador.Assim sem perda de generalidade vamos supor que as letras são, $x, y, z\ e\ w$, e veremos o que acontece.

Seja $\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x+y}{z+w},\ com\ \ z+w \neq 0$

primeiramente para que a soma das frações $\frac{x}{z} + \frac{y}{w}$ seja igual a fração $\frac{x+y}{z+w}$ temos que:

$$\frac{x+y}{z+w} = \frac{x}{z} = \frac{y}{w} \quad (1)$$

Da soma das frações $\frac{x}{z} + \frac{y}{w} =$, temos:

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw+yz}{zw} \quad (2)$$

Daí e de (1) e (2), tem-se:

$$\frac{x+y}{z+w} = \frac{xw+yz}{zw} \Rightarrow \cancel{xzw} + yz^2 + xw^2 + \cancel{yzw} = \cancel{xzw} + \cancel{yzw} \Rightarrow yz^2 + xw^2 = 0 \quad \text{ou} \quad xw^2 + yz^2 = 0$$

Observando essa relação podemos notar que:

1º "x" é o númerador da 1ª fração;

2º "w" é o denominador da 2ª fração;

3º "y" é o númerador da 2ª fração;

4º "z" é o denominador da 1ª fração.

Assim se a relação $yz^2 + xw^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x+y}{z+w}$

Logo para $ad^2 + bc^2 = 0 \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$

Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

13) Um número natural N deixa: resto 2 quando dividido por 3;resto 3 quando dividido por 7;e resto 19 quando dividido por 41 .Qual é o resto da divisão do número $K = (N+1) \cdot (N+4) \cdot (N+22)$ por 861

(A) 0 (B) 13 (C) 19 (D) 33 (E) 43

Resolvendo, temos:

$$\begin{array}{l|l} N & 3 \\ \hline 2 & q1 \end{array} \Rightarrow N = 3\,q1 + 2$$

$$\begin{array}{l|l} N & 7 \\ \hline 3 & q2 \end{array} \Rightarrow N = 7\,q2 + 3$$

$$\begin{array}{l|l} N & 41 \\ \hline 19 & q3 \end{array} \Rightarrow N = 41\,q3 + 19$$

Observe que $861 = 3 \times 7 \times 41$

Assim N+1 = 3 q1 + 3 (divisível por três)

N+4 = 3 q2 + 7 (divisível por sete)

N+22 = 41 q3 + 41 (divisível por quareta e um)

Logo $K = \underbrace{(N+1)}_{\text{divisível por três}} \times \underbrace{(N+4)}_{\text{divisível por sete}} \times \underbrace{(N+22)}_{\text{divisível por quareta e um}} \Rightarrow K$ é divisível por 861

Daí o resto é zero

Alternativa A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

14) Uma herança P foi dividida por dois herdeiros ,com idades , respectivamente, iguais a n e m ,em partes diretamente proporcionais ao quadrado de suas idades .Qual foi a parte da herança recebida pelo herdeiro de idade n?

(A) $\frac{P^2 n}{m^2 + n^2}$ (B) $\frac{Pn^2}{m^2 + n^2}$ (C) $\frac{P^2 n^2}{m^2 + n^2}$

(D) $\frac{Pn^2 m}{m^2 + n^2}$ (E) $\frac{P^2 n^2 m}{m^2 + n^2}$

Resolvendo o exercício, temos:

Sendo "n" e "m" as idades e "p" a herança.

Sejam "A" e "B" as partes relativas a "n" e "m" respectivamente, então temos:

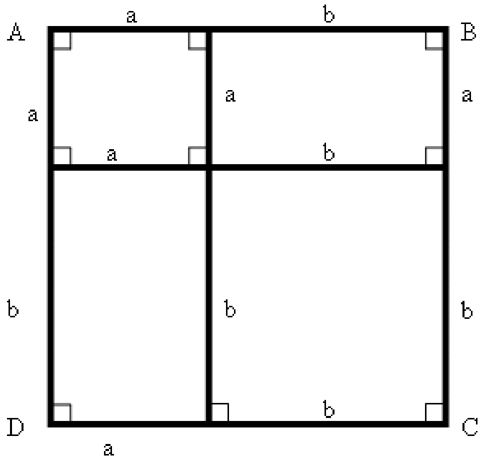
$$\begin{cases} A + B = p \\ \frac{A}{n^2} = \frac{B}{m^2} \Rightarrow \frac{A}{n^2} = \frac{B}{m^2} = \frac{A+B}{n^2+m^2} = \frac{p}{n^2+m^2} \end{cases}$$

Assim $\frac{A}{n^2} = \frac{p}{n^2+m^2} \Rightarrow A = \frac{p \cdot n^2}{n^2+m^2}$

Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

15)



Qual é o produto notável representado, geometricamente, na figura acima, na qual ABCD é um retângulo ?

(A) $a^3 + b^3$ (B) $(a+b)^3$ (C) $(a+b)^2$ (D) $(a^2+b^2)^2$ (E) $(a+b)^4$

Resolvendo a questão, temos:

Observando o quadrilátero ABCD vemos que é um quadrado, assim:

O produto notável é $(\mathrm{a} + \mathrm{b})^2$.

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

16) O valor numérico da expressão $120k^4 + 10k^2 + 8$, sendo k pertencente ao conjunto dos números naturais, é o quadrado de um número natural para

(A) somente um único valor de k.
(B) somente dois valores de k.
(C) somente valores de k múltiplos de
(D) 13.somente valores de k múltiplos de 18.
(E) nenhum valor de k.

Resolvendo a questão, temos:

Temos que:

$$120\,k^4 + 10\,k^4 + 8 = 10\cdot\left(12\,k^4 + k^4\right) + 8$$

Observando que $\left(12\,k^4 + k^4\right)$ é um número natural para qualquer valor de k natural,

então fazendo $x = 12\,k^4 + k^4$, tem-se:

$$10\cdot\underbrace{\left(12\,k^4 + k^4\right)}_{=x} + 8 = 10x + 8$$

O que indica que $10x + 8$ é um número natural em que o algarísmo das unidades é oito.

Da aritmética sabemos que não existem raizes quadradas exatas de números que tem o algarismo das unidades iguais a:

Dois (2), Três (3), Sete (7) e Oito (8).

Assim para nenhum valor de "k" natural o valor numérico da expressão acima é quadrado de um número natural.

Alternativa E

Outra solução: Equação Diofantina Linear

Seja n um possível quadrado perfeito, assim:

$$120k^4 + 10k^2 + 8 = n \Rightarrow 120k^4 + 10k^2 = n - 8$$

Sejam $a = k^4$ e $b = k^2 \Rightarrow 120a + 10b = n - 8$ é uma equação diofantina linear.

Que para se ter solução, é necessário é suficiente que o $\text{mdc}\left(120,10\right) = 10$, divida n-8, isto é, $10|n-8$, assim "n" tem que ser um número que tem o algarísmo das unidades igual a 8. Mas da aritmética sabemos que não existem quadrados perfeitos de números que tem o algarismo das unidades iguais a:

Dois (2), Três (3), Sete (7) e Oito (8).

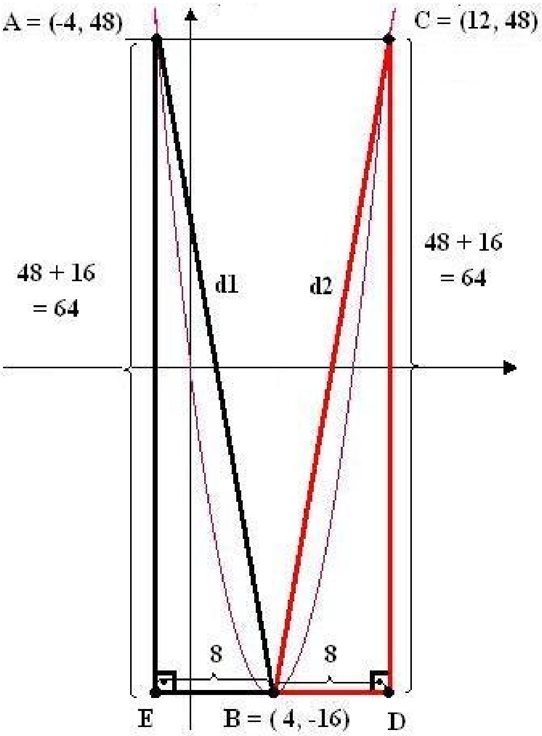
Assim para nenhum valor de "k" natural o valor numérico da expressão acima é quadrado de um número natural.

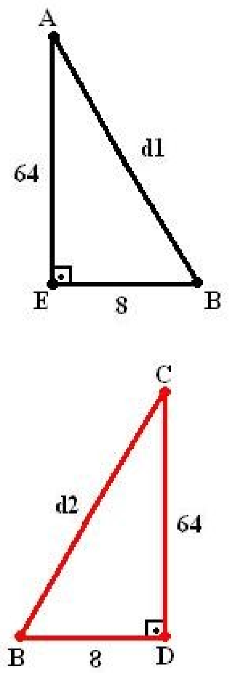
Alternativa E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

17) Considere os pontos A ,B e C pertencentes ao gráfico do trinômio do segundo grau definido por $y = x^2 - 8x$ .Se : a abscissa do ponto A é -4 ; B é o vértice ; a abscissa do ponto C é 12 ; o segmento AB tem medida d_1;e o segmento BC tem medida d_2,pode-se afirma que

(A) $d_1 + d_2 < 48$ (B) $48 < d_1 + d_2 < 64$ (C) $64 < d_1 + d_2 < 72$
(D) $72 < d_1 + d_2 < 128$ (E) $d_1 + d_2 > 128$





Sendo $y = x^2 - 8x$ ou $f(x) = x^2 - 8x$, temos:

para $x = -4 \Rightarrow f(-4) = (-4)^2 - 8\cdot(-4) \Rightarrow f(-4) = 16 + 32 \Rightarrow f(-4) = 48$

Assim o ponto A= $(-4,\ 48)$

para $x = 12 \Rightarrow f(12) = 12^2 - 8\cdot 12 \Rightarrow f(12) = 144 - 96 \Rightarrow f(12) = 48$

Assim o ponto C = $(12,\ 48)$

O vértice é dado por V = $\left(x_v; y_v\right) = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$ *ou* V = $\left(\dfrac{S}{2}, f\left(S/2\right)\right)$, daí temos:

Como S = 8 $\Rightarrow x_v = \dfrac{8}{2} \Rightarrow x_v = 4 \Rightarrow y_v = f(4) = 4^2 - 8\cdot 4 \Rightarrow f(4) = 16 - 32 \Rightarrow f(4) = -16$

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

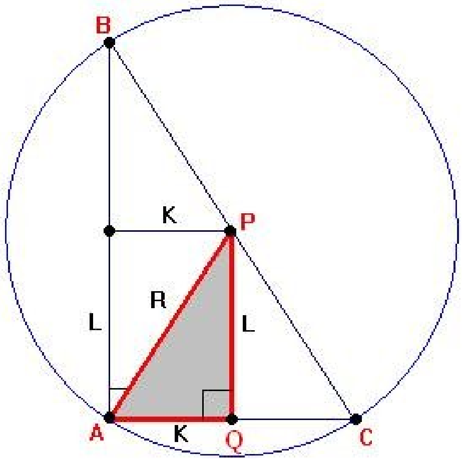
Assim o ponto B = $(4, -16)$, com esses valores montamos a figura acima, e podemos notar que são dois triângulo retângulo congruentes, note que o segmento EB = B - E = 4 - (-4) = 8 e BD = D - B = 12 - 4 = 8 diferemça entre as abscissas dos pontos (B e E) e (D e B) respectivamente, do mesmo modo o segmento EA = E - A = 48 - (-16) = 48 + 16 = 64 e DC = C - D = 48 - (-16) = 48 + 16 = 64, logo d1 é igual a d2, pela desigualdade triângular temos: d1 < 8 + 64 $\Rightarrow$ d1 < 72 do mesmo modo podemos concluir que d2 < 72 e d1 > 64 - 8 $\Rightarrow$ d1 > 56 do mesmo modo podemos concluir que d2 > 56, assim:

56 < d1 < 72 e 56 < d2 < 72 somando-se membro a membro, temos:

$\Rightarrow$ 112 < d1 + d2 < 144, logo a alternativa correta é a letra E.

18) Dado um triângulo retângulo ,seja P o ponto do plano do triângulo eqüidistante dos vértices .As distâncias de P aos catetos do triângulo são k e L .O raio do círculo circunscrito ao triângulo é dado por

(A) $\frac{K+L}{4}$ (B) $2K+L$ (C) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{2}$ (E) $\sqrt{K^2+L^2}$



Em qualquer triângulo esse ponto é o circuncentro ou seja é o ponto de encontro das três mediatrizes, e é o centro do círculo circunscrito, em relação ao triângulo retângulo esse ponto é o ponto médio da hipotenusa, assim observando a figura acima, temos:

$R^2 = K^2 + L^2 \Rightarrow R = \sqrt{K^2 + L^2}$

Alternativa E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

19) Dada a equação na variável real $x : 7x - \frac{3}{x} = k$,pode-se concluir ,em função do parâmetro real k ,que essa equação

(A) tem raízes reais só se k for um número positivo.
(B) tem raízes reais só se k for um número negativo.
(C) tem raízes reais para qualquer valor de k.
(D) tem raízes reais somente para dois valores de k.
(E) nunca terá raízes reais.

Resolvendo, temos:

$$7x - \frac{3}{x} = k \Rightarrow 7x^2 - 3 = kx \Rightarrow 7x^2 - kx - 3 = 0$$

$$\Delta = (-k)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-3) \Rightarrow \Delta = k^2 + 84$$

Logo como k^2 é positivo para qualquer valor de k, temos que $\Delta > 0$ para qualquer valor de K, assim a equação do 2º grau possui duas raízes reais diferentes.

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

20) Sejam L_1 e L_2 duas circunferências fixas de raios diferentes , que se cortam em A e B . P é um ponto variável exterior às circunferências (no mesmo plano) . De P traçam-se retas tangentes à L_1 e L_2 ,cujos pontos de contatos são R e S . Se PR=PS ,Pode-se afirmar que P , A e B

(A) estão sempre alinhados.
(B) estão alinhados somente em duas posições.
(C) estão alinhados somente em três posições.
(D) estão alinhados somente em quatro posições.
(E) nunca estarão alinhados.

A resposta a essa questão é a Alternativa A, porem o aluno deveria ter o conhecimento de Eixo Radical , que não consta "claramente" do programa de matérias a serem estudados, porem no programa consta o estudo de lugares geométricos.
O lugar Geométrico denominado de Eixo Radical, não conta de bibliografia em vigor, somente em livros esgotados.
Obs.: A questão poderia ser resolvida usando o conceito de Potência de um ponto em relação a um círculo.

Antes de resolver a questão vamos definir algumas coisas e mencionar alguns teoremas:

POTÊNCIA DE UM PONTO

TEOREMA: Se traçarmos, por um ponto do plano de uma circunferência, secantes a esta, o 'produto dos dois segmentos orientados, que tem por origem esse ponto e por extremidades as intersecções de cada secante com a circunferência, é constante (é o mesmo para todas as secantes). Esse produto constante chama-se POTÊNCIA do ponto P em relação à circunferência.

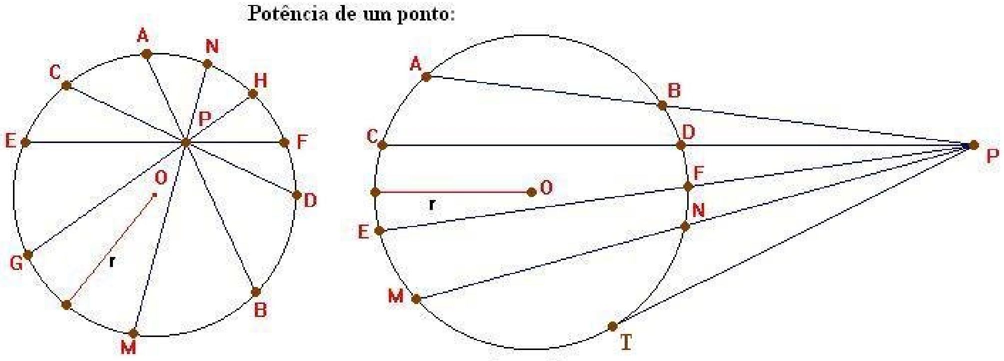
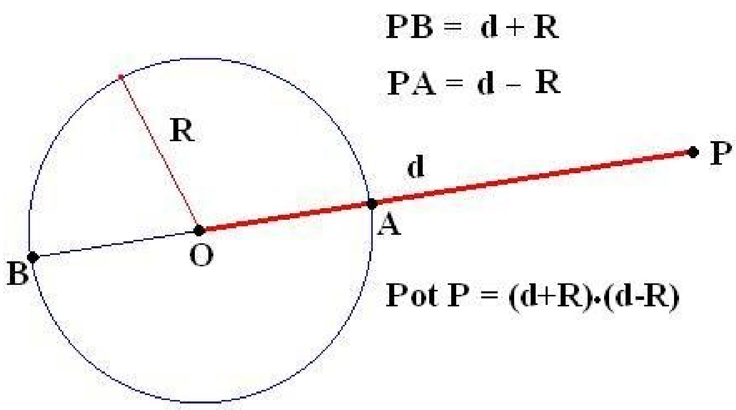


figura 01 figura 02

$$Pot_P = PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF = \ldots = (PT)^2$$



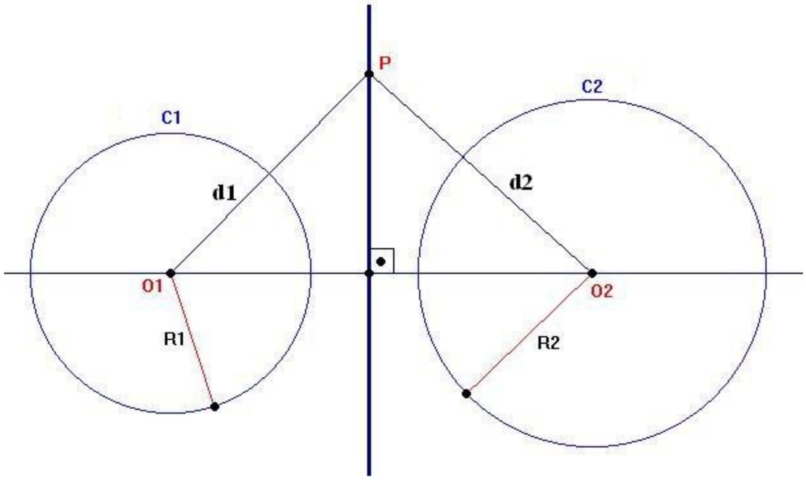
Obs.: Em particular, se um ponto pertence a uma circunferência, a potência desse ponto em relação a essa circunferência é, por definição, igual a zero.

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

PONTOS DE MESMA POTÊNCIA EM RELAÇÃO A DUAS CIRCUNFERÊNCIAS:
TEOREMA: O lugar geométrico dos pontos de um plano, que tem a mesma potência em relação a duas circunferências dadas, é uma reta perpendicular a linha dos centros das circunferências.

EIXOS RADICAIS:

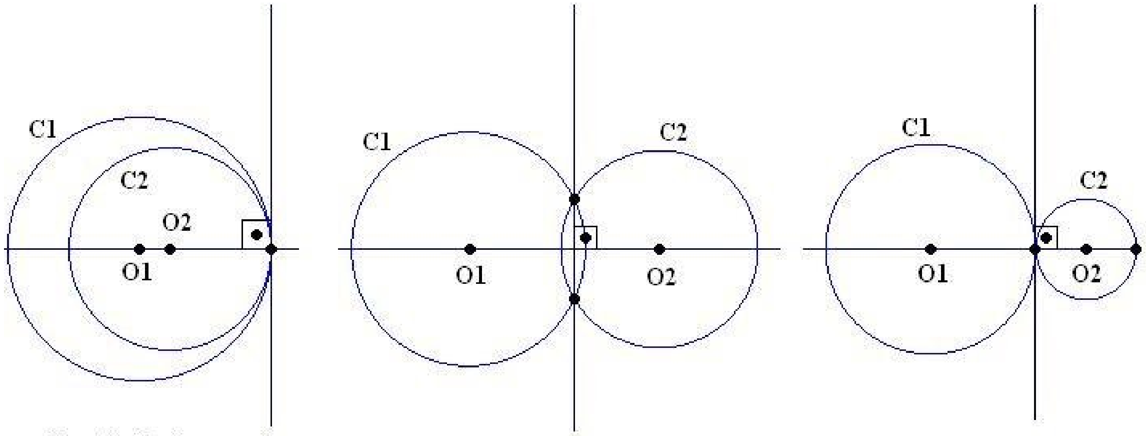
DEFINIÇÃO: Dadas duas circunferências C_1 e C_2 com centro em O_1 e O_2 raios R_1 e R_2 respectivamente, denomina-se EIXO RADICAL, o lugar geométrico dos pontos de um plano de mesma potência em relação a C_1 e C_2.



Potência de P em relação a O1 = Potência de P em relação a O2

$\Rightarrow \text{d}1^2 - R1^2 = \text{d}2^2 - R2^2 \Rightarrow \text{d}1^2 - \text{d}2^2 = R1^2 - R2^2 = k^2$

PROPRIEDADE:
O EIXO RADICAL de C_1 e C_2 é o lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes a C_1 e C_2 com o mesmo comprimento.



Eixo Radical - para duas circunferências tangentes interiores

Eixo Radical - para duas circunferências secantes

Eixo Radical - para duas circunferências tangentes Exteriores

Pelo exposto acima a resposta correta é a Alternativa A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

2ª SOLUÇÃO:

$PR^2 = PA \times PD$ (1)

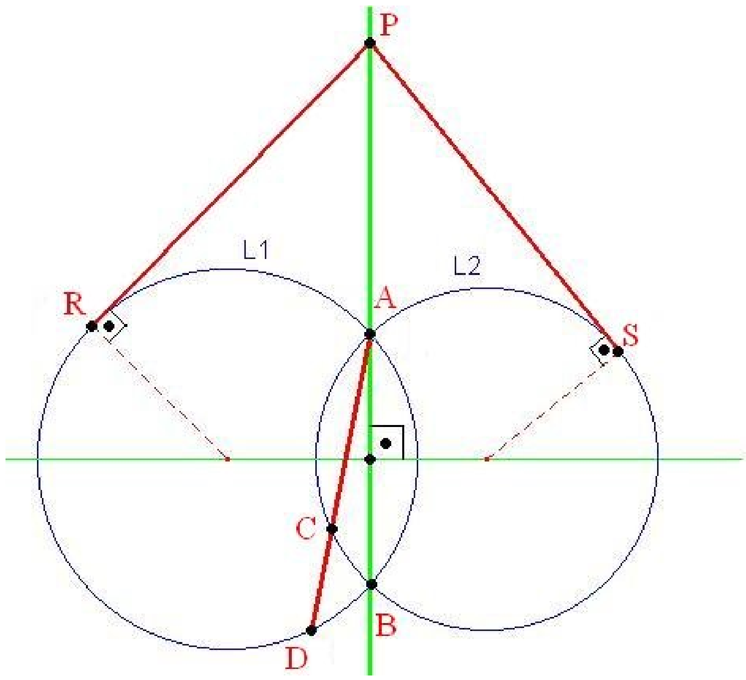
$PS^2 = PA \times PC$ (2)

Dividindo (1) por (2), temos:

$\frac{PR^2}{PS^2} = \frac{\cancel{PA} \times PD}{\cancel{PA} \times PC}$ mas por hipótese PR = PS $\Rightarrow \frac{PR^2}{PR^2} = \frac{PD}{PC} \Rightarrow PD = PC$

Como PD = PA + AD e PC = PA + AC

$PD = PC \Rightarrow \cancel{PA} + AD = \cancel{PA} + AC \Rightarrow AD = AC$, mas como "C" e "D" são colineares $\Rightarrow AD = AC + CD \Rightarrow \cancel{AC} + CD = \cancel{AC} \Rightarrow CD = 0$ o que indica que os pontos "C" e "D" são coincidentes, mas como por hipótese as interseções de L1 e L2 são os pontos A e B, então os pontos "B", "C" e "D" são coincidentes, logo os pontos "P", "A" e "B" são colineares.



Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006