Colegio Naval 2005

01)

	1	1	2
A	B	C	40
D	E	0	

O algoritmo acima foi utilizado para o cálculo do máximo divisor comum entre os números A e B. Logo A + B + C vale

(A) 400 (B) 300 (C) 200 (D) 180 (E) 160

Resolvendo: Temos que

$$E = 40$$
$$C = E \times 2 \Rightarrow C = 40 \times 2 = 80$$
$$B = C \times 1 + E \Rightarrow B = 80 \times 1 + 40 = 120$$
$$A = B \times 1 + D \Rightarrow A = 120 + D \quad \text{mas} \quad D = C$$
$$\Rightarrow A = 120 + 80 \Rightarrow A = 200$$
$$\text{Logo } A + B + C + D = 200 + 120 + 80 = 400$$

	1	1	2
200	120	80	40
80	40	0	

Alternativa A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

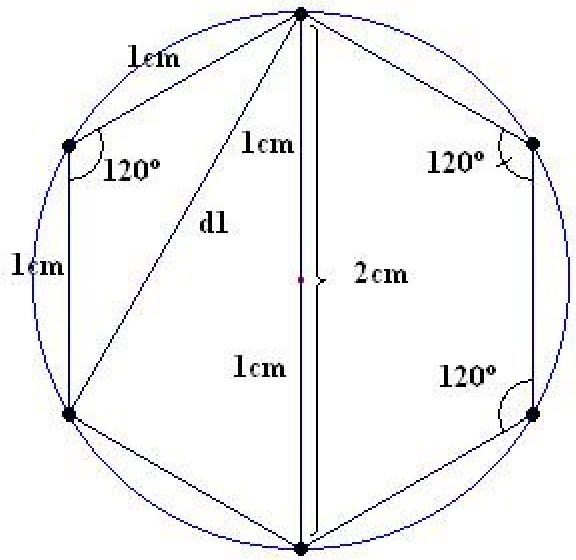
02) Um professor usa para medir comprimentos uma unidade denominada "nix", definida como 1 nix = $\sqrt{3}$ centímetros. Ele mediu na unidade nix as diagonais de um hexágono regular de lado 1 cm e encontrou para as menores x e para as maiores y. Pode-se concluir que x e y são, respectivamente,

(A) números racionais (B) números irracionais.

(C) um número inteiro e um número irracional.

(D) um número irracional e um número inteiro.

(E) um número racional não inteiro e um número irracional.



$y = 1 + 1 = 2cm$

Usando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow x^2 = 1 + 1 - \cancel{2} \cdot \left(\frac{-1}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow x^2 = 2 + 1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}cm$$

$1\ nix$ ________ $\sqrt{3}$

$x\ nix$ ________ $\sqrt{3}cm$

$\Rightarrow x = 1\ nix$

$1\ nix$ ________ $\sqrt{3}cm$

$y\ nix$ ________ $2cm$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3} nix$$

Aternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

03) Os números reais positivos a e b satisfazem a iqualdade:

$a\sqrt{(a^2+2b^2)} = b\sqrt{(9a^2-b^2)}$. Um valor possível, para $\frac{a}{b}$ é

(A) $\frac{5+2\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$$a\sqrt{(a^2+2b^2)} = b\sqrt{(9a^2-b^2)} \Rightarrow \left(a\cdot\sqrt{(a^2+2b^2)}\right)^2 = \left(b\cdot\sqrt{(9a^2-b^2)}\right)^2$$

$$a^2\cdot\left(\sqrt{(a^2+2b^2)}\right) = b^2\cdot\left(\sqrt{(9a^2-b^2)}\right)^2 \Rightarrow a^2\cdot(a^2+2b^2) = b^2\cdot(9a^2-b^2)$$

$$\Rightarrow a^4+2a^2b^2 = 9a^2b^2-b^4 \Rightarrow a^4+2a^2b^2-9a^2b^2+b^4=0 \Rightarrow a^4-7a^2b^2+b^4=0$$

$$\Rightarrow\left(a^4-2a^2b^2+b^4\right)-5a^2b^2 \Rightarrow \left(a^2-b^2\right)^2-\sqrt{5}\,a^2b^2=0\Rightarrow$$

$$\left(a^2-b^2\right)^2-\left(\sqrt{5}\,a\,b\right)^2=0\Rightarrow\left(a^2-b^2+\sqrt{5}\,a\,b\right)\cdot\left(a^2-b^2-\sqrt{5}\,a\,b\right)=0$$

$\Rightarrow a^2+\sqrt{5}\,b\cdot a-b^2=0$ ou $a^2-\sqrt{5}\,b\cdot a-b^2=0$ (observem que a variável é "a")

assim de:

$$a^2+\sqrt{5}\,b\cdot a-b^2=0\Rightarrow\Delta=\left(\sqrt{5}\,b\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-b^2\right)\Rightarrow\Delta=5b^2+4b^2\Rightarrow\Delta=9b^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{9b^2}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=3b\Rightarrow a=\frac{-\sqrt{5}\,b\pm3b}{2}\Rightarrow a_1=\frac{-\sqrt{5}\,b+3b}{2}\Rightarrow a_1=\frac{b\left(-\sqrt{5}+3\right)}{2}$$

$$\frac{a_1}{b}=\frac{-\sqrt{5}+3}{2}\,ok \text{ e } a_2=\frac{-\sqrt{5}\,b-3b}{2}\Rightarrow a_2=\frac{b\left(-\sqrt{5}-3\right)}{2}\Rightarrow\frac{a_2}{b}=\frac{-\sqrt{5}-3}{2} \text{ não serve}$$

e de:

$$a^2-\sqrt{5}\,b\cdot a-b^2=0\Rightarrow\Delta=\left(-\sqrt{5}\,b\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-b^2\right)\Rightarrow\Delta=5b^2+4b^2\Rightarrow\Delta=9b^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{9b^2}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=3b\Rightarrow a=\frac{\sqrt{5}\,b\pm3b}{2}\Rightarrow a_3=\frac{\sqrt{5}\,b+3b}{2}\Rightarrow a_3=\frac{b\left(\sqrt{5}+3\right)}{2}$$

$$\frac{a_3}{b}=\frac{\sqrt{5}+3}{2}\,ok \text{ e } a_4=\frac{\sqrt{5}\,b-3b}{2}\Rightarrow a_4=\frac{b\left(\sqrt{5}-3\right)}{2}\Rightarrow\frac{a_4}{b}=\frac{\sqrt{5}-3}{2} \text{ não serve}$$

Logo os valores possíveis, são:

$$\frac{a_1}{b}=\frac{-\sqrt{5}+3}{2} \quad e \quad \frac{a_3}{b}=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

Alternativa E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

04)

A	1	3	6	9
B	3	9	18	27
C	3	27	108	243
D	3	2	1	1/3

As linhas da tabela acima mostram a variação de quatro grandezas: A, B, C e D. Observa-se, por exemplo, que quando a grandeza A vale 6 as grandezas B, C e D valem, respectivamente, 18, 108 e 1.
Com base nos dados apresentados, analise as afirmativas abaixo.

I - A grandeza A é diretamente proporcional a B.
II - A grandeza A é diretamente proporcional a C.
III - A grandeza A é inversamente proporcional a D.

Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(C) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(E) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

```
Resolução:
Duas grandezas estão em proporção direta quando a razão entre
elas é uma constante.
Duas grandezas estão em proporção inversas quando o pruduto
entre elas for uma constante.
```

Assim de (I) $\Rightarrow$ Se A for diretamente proporcional a B, então:

$$\frac{A}{B} = \underbrace{\frac{1}{3} = \frac{3}{9}}_{1\times 9 = 3\times 3} = \underbrace{\frac{6}{18} = \frac{9}{27}}_{6\times 27 = 9\times 18} \quad e \quad \frac{A}{B} = \frac{1}{3} = \overbrace{\frac{3}{9} = \frac{6}{18}}^{3\times 18 = 6\times 9} = \frac{9}{27} \text{ ok}$$

De (II) $\Rightarrow$ Se A for diretamente proporcional a C, então:

$$\frac{A}{C} = \underbrace{\frac{1}{3} = \frac{3}{27}}_{1\times 27 \neq 3\times 3} = \frac{6}{108} = \frac{9}{243} \text{ falsa}$$

De (III) $\Rightarrow$ Se A for inversamete proporcional a D, então:

$$A\times D = \underbrace{1\times 3}_{3} = \underbrace{3\times 2}_{6} = \underbrace{6\times 1}_{6} = \underbrace{9\times \frac{1}{3}}_{3} \text{ falsa}$$

Alternativa A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

05) Três dos quatro lados de um quadrilátero circunscritível são iguais aos lados do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular circunscritos a um círculo de raio 6. Qual é a medida do quarto lado desse quadrilátero, sabendo-se que é o maior valor possível nas condições dadas?

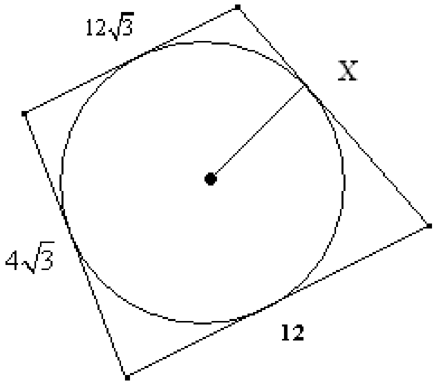
(A) $16\sqrt{3}$ - 12 (B) $12\sqrt{3}$ - 12 (C) $8\sqrt{3}$ + 12
(D) $12\sqrt{3}+8$ (E) $16\sqrt{3}$ - 8

Fazendo-se uso da tabela abaixo, temos:

l_n	$l_3 = R\sqrt{3}$	$l_4 = R\sqrt{2}$	$l_6 = R$
a_n	$a_3 = \dfrac{R}{2}$	$a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$	$a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$
L_n	$L_3 = 2R\sqrt{3}$	$L_4 = 2R$	$L_6 = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

OBS: $\dfrac{l_n}{L_n} = \dfrac{a_n}{R} \Rightarrow L_n = \dfrac{l_n \times R}{a_n}$

De acordo com o enunciado do problema podemos montar afigura abaixo, assim:



Assim usando o teorema de Pitot, temos:

$12\sqrt{3}+12 = 4\sqrt{3}+x \Rightarrow x = 8\sqrt{3}+12$

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

06) Simplificando-se a fração $\dfrac{a^4+b^4-6a^2b^2}{a^2-b^2+2ab}$, onde $a > b$, obtém-se

(A) a^2-b^2-2ab (B) a^2-b^2+2ab (C) a^2+b^2-2ab
(D) a^2+b^2+2ab (E) a^2+b^2

Resolvendo: 1ª SOLUÇÃO
Desenvolvendo o numerador temos:

$$a^4+b^4-6a^2b^2 \Rightarrow \left(a^4-4a^2b^2+b^4\right)-4a^2b^2 \Rightarrow \left(a^2-b^2\right)^2-\left(2ab\right)^2$$
$$\Rightarrow \left(a^2-b^2+2ab\right)\cdot\left(a^2-b^2-2ab\right)$$
$$Assim\ \ \frac{a^4+b^4-6a^2b^2}{a^2-b^2+2ab}=\frac{\cancel{\left(a^2-b^2+2ab\right)}\cdot\left(a^2-b^2-2ab\right)}{\cancel{a^2-b^2+2ab}}=a^2-b^2-2ab$$

2ª SOLUÇÃO
Poderíamos "cartear" valores, isto é, chutar um valor para "a" e um valor para "b" convenientes para chegarmos a resposta, assim temos:

$$Sendo:\ \ a=2\ e\ b=1$$
$$\Rightarrow \frac{a^4+b^4-6a^2b^2}{a^2-b^2+2ab}\Rightarrow \frac{2^4+1^4-6\times2^2\times1^2}{2^2-1^2+2\times2\times1}=\frac{16+1-6\times4\times1}{4-1+2\times2\times1}=\frac{17-24}{3+4}=\frac{-7}{7}=-1$$

Agora aplicando nas opções:

$a)a^2-b^2-2ab \Rightarrow 2^2-1^2-2\times2\times1=\cancel{4}-1\cancel{-4}=-1$ (*que é a resposta*)

$b)a^2-b^2+2ab \Rightarrow 2^2-1^2+2\times2\times1=4-1+4=7$

$c)a^2+b^2-2ab \Rightarrow 2^2+1^2-2\times2\times1=\cancel{4}+1\cancel{-4}=1$

$d)a^2+b^2+2ab \Rightarrow 2^2+1^2+2\times2\times1=4+1+4=9$

$e)a^2+b^2 \Rightarrow 2^2+1^2=4+1=5$

Alternativa A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

07) Em quantos meses, no mínimo, um capital aplicado segundo a taxa simples de 0,7% ao mês produz um montante que supera o dobro do seu valor?

(A} 140 (B) 141 (C) 142 (D) 143 (E) 144

Resolvendo:

Sendo "C" o capital empregado $\Rightarrow \mathrm{M} > 2 \cdot C,\ mas\ M = C + J$

$\Rightarrow 2C < C + J \Rightarrow J > C$

Assim como $J = \dfrac{C \cdot i \cdot t}{100} \Rightarrow C < \dfrac{C \cdot i \cdot t}{100} \Rightarrow \cancel{C} < \dfrac{\cancel{C} \cdot 0{,}7 \cdot t}{100} \Rightarrow 100 < 0{,}7 \cdot t$

$\Rightarrow t > \dfrac{100}{0{,}7} \cong 142{,}8 \Rightarrow t > 142{,}8$

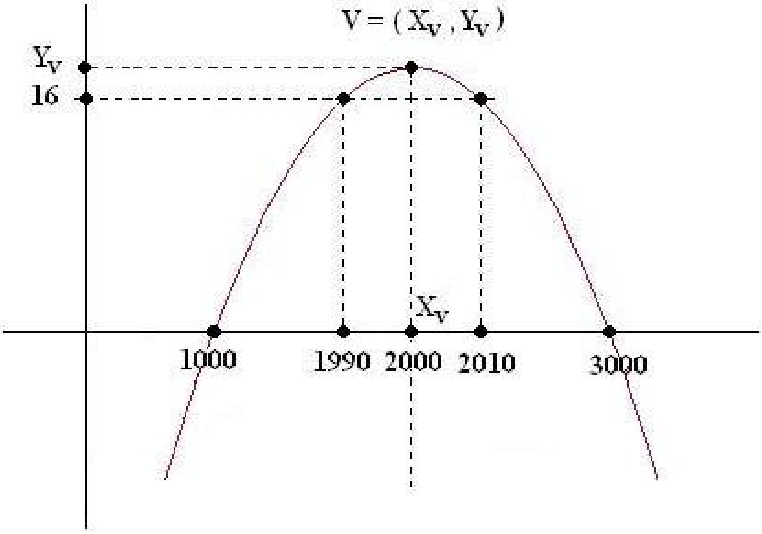
Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

08) As raízes do trinômio do 2° grau $y = ax^2 + bx + c$ são 1000 e 3000. Se quando x vale 2010 o valor numérico de y é 16, qual é o valor numérico de y quando x vale 1990?

(A) 64 (B) 32 (C) 16 (D) 8 (E) 4

1ª SOLUÇÃO:



Resolução:

Pela simetria do gráfico da função gradrática (trinômio do 2º), temos:

$$V = \left(x_v; y_v\right) \Rightarrow V = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V = \left(\frac{S}{2}; \frac{-\Delta}{4a}\right) \Rightarrow x_v = \frac{S}{2} = \frac{1000+3000}{2} = \frac{4000}{2} = 2000$$

podemos observar que 1990 e 2010 são equidistantes da abiscissa do vértice, assim, 1990 e 2010 terão a mesma ordenada.

2ª SOLUÇÃO:

Fazendo uso da fórmula $y = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$

$$para\ \ x = 2010,\ x_1 = 1000\ e\ x_2 = 3000 \Rightarrow 16 = a\cdot(2010-1000)\cdot(2010-3000)$$

$$\Rightarrow 16 = a\cdot 1010\cdot(-990) \Rightarrow 16 = -\,a\cdot 990\cdot 1010 \quad (1)$$

$$para\ \ x = 1990,\ x_1 = 1000\ e\ x_2 = 3000 \Rightarrow y = a\cdot(1990-1000)\cdot(1990-3000)$$

$$\Rightarrow y = a\cdot 990\cdot(-1010) \Rightarrow y = -\,a\cdot 990\cdot 1010 \quad (2)$$

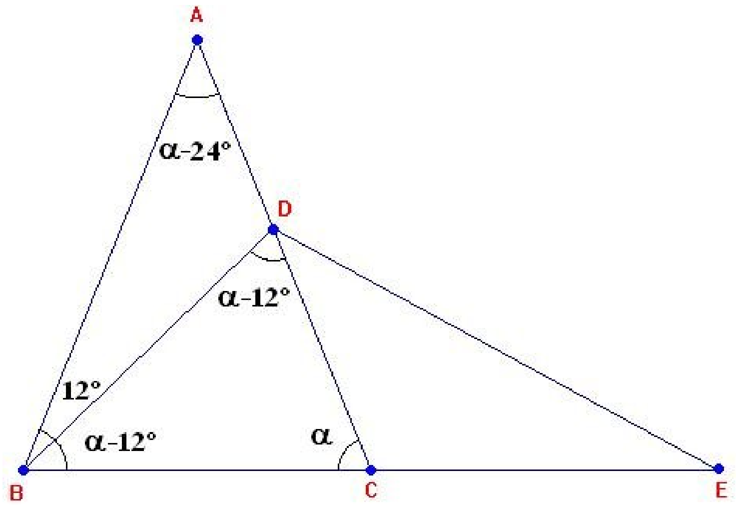
$$Daí,\ \text{de}\ (1)\ e\ (2) \Rightarrow y = 16$$

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

09) Num triânqulo ABC, $AB = AC$, o ponto D interno cio lado AC é determinado de modo que $DC = BC$. Prolonga-se o lado BC (no sentido de B para C) até o ponto E de modo que $CE = BC$. Se o ângulo $A\hat{B}D$ mede 12^o, qual a medida, em graus, do ângulo $B\hat{A}C$?

(A) 100 (B) 88 (C) 76 (D) 54 (E) 44



Mostando a figura conforme o enunciado, temos:

Do triângulo ABC $\Rightarrow \alpha + \alpha + \alpha - 24^o = 180^o \Rightarrow 3\alpha - 24^o = 180^o$

$\Rightarrow 3\alpha = 180^o + 24^o \Rightarrow 3\alpha = 204^o \Rightarrow \alpha = \dfrac{204^o}{3} \Rightarrow \alpha = 68^o$

Logo $\hat{A} = \alpha - 24^o \Rightarrow \hat{A} = 68 - 24^o \Rightarrow \hat{A} = 44^o$

Alternativa E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

10)

$$S:\begin{cases}2x+3y=7\\3x+2y=9\\ax+by=c\end{cases}$$

Observe o sistema linear S. É correto afirmar, em relação aos parâmetros reais a, b e c, que
(A) quaisquer que sejam, S será possível e determinado.
(B) existem valores desses parâmetros que tornam S possível e determinado.
(C) quaisquer que sejam, S será possível e indeterminado.
(D) existem valores desses parâmetros que tornam S indeterminado.
(E) quaisquer que sejam, S será impossível.

Para resolver essa questão temos que ter em mente que cada equação representa uma reta, isto é, se em $ax+by=c$ $\underline{a}$ e $\underline{b}$ não forem ambos nulos.
Assim temos dois casos a considerar:
1º CASO: quando "a" e "b" forem ambos nulos e "c" for difernte de zero e,
2º CASO: quando "a" e "b" não forem ambos nulos.

No 1º CASO temos que se a e b forem ambos iguais a zero e "c" for difernte de zero então o sistema será impossível.
No 2º CASO, temos o exposto abaixo:
Resolvendo o sistema em relação as duas primeiras equações, temos:

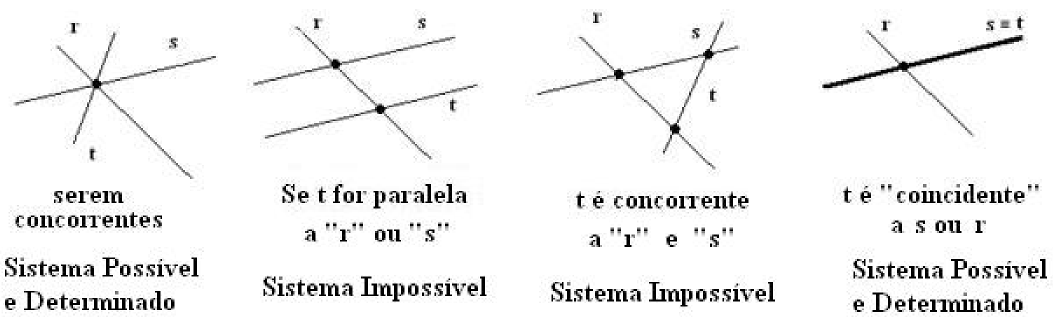
$$S:\begin{cases}2x+3y=7\ (s)\\3x+2y=9\ (r)\\ax+by=c\ \ (t)\end{cases}$$

$$S:\begin{cases}2x+3y=7\times(2)\\3x+2y=9\times(-3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x+6y=14\\-9x-6y=-27\end{cases}\Rightarrow -5x=-13\Rightarrow x=2,6$$

agora substituíndo esse valor em uma das equações anteriores, temos:

$$2x+3y=7\Rightarrow 2\times(2,6)+3y=7\Rightarrow 5,2+3y=7\Rightarrow 3y=1,8\Rightarrow y=0,6$$

Assim as duas primeiras retas se encontram em um ponto, isto é, no ponto P = (2,6 ; 0,6) .
Dessa forma podemos montar o esquema abaixo:



Logo pelo 1º CASO e 2º CASO, temos que a alternativa correta é a alternativa B.
OBS: Para o sistema ser indeterminado as três retas teriam que ser coincidentes.

Alernativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

11) O número de diagonais de um polígono regular P inscrito em um círculo K é 170. Logo
(A) o número de lados de P é ímpar.
(B) P não tem diagonais passando pelo centro de K.
(C) o ângulo externo de P mede 36° .
(D) uma das diagonais de P é o lado do pentágono regular inscrito em K.
(E) o número de lados de P é múltiplo de 3.

$$d = 170,\ como\ d = \frac{n\cdot(n-3)}{2} \Rightarrow 170 = \frac{n\cdot(n-3)}{2} \Rightarrow 340 = n^2 - 3n \Rightarrow n^2 - 3n - 340 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4\cdot1\cdot(-340) \Rightarrow \Delta = 9 + 1360 \Rightarrow \Delta = 1369 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 37$$

$$\Rightarrow n = \frac{3\pm37}{2} \Rightarrow n_1 = \frac{3+37}{2} \Rightarrow n_1 = \frac{40}{2} \Rightarrow n_1 = 20$$

$$n_2 = \frac{3-37}{2} \Rightarrow n_2 = \frac{-34}{2} \Rightarrow n_2 = -17(\text{não serve})$$

Logo o polígono possuí 20 lados (Icoságono), assim:

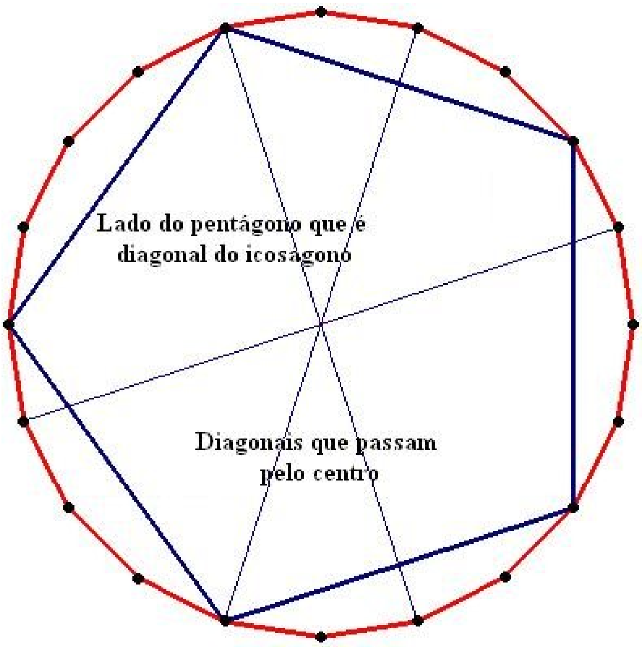
Alternativa (a) $\Rightarrow$ falsa, pois, o número de lados é par.

Alternativa (b) $\Rightarrow$ falsa, pois, o icoságono possui diagonais que passam pelo centro.

Alternativa (c) $\Rightarrow$ falsa, pois, $A_e = \frac{360^o}{n} \Rightarrow A_e = \frac{360^o}{20} \Rightarrow A_e = 18^o$.

Alternativa (d) $\Rightarrow$ correta, observe a figura abaixo.

Alternativa (e) $\Rightarrow$ falsa, pois, vinte não é divisível por três.

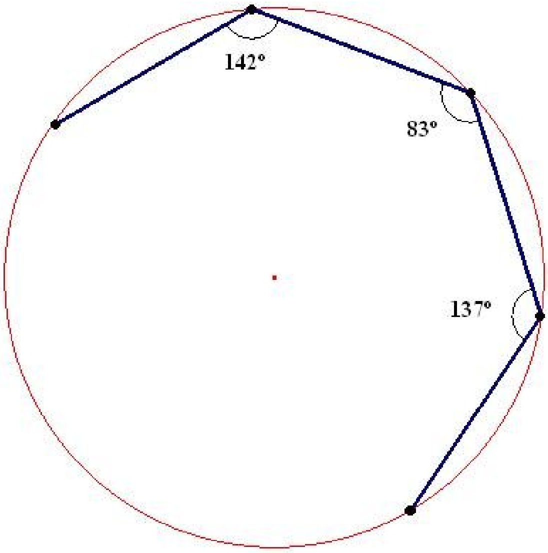


Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

12) Um polígono convexo de n lados tem três dos seus ângulos iguais a 83°, 137° e 142°. Qual é o menor valor de n para que nenhum dos outros ângulos desse polígono seja menor que 121º?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10



Resolvendo, temos:

83º+137º+142º=362º

A soma dos ângulos internos de um polígono é dada por $S_i = 180^\circ \cdot (n-2)$

A soma dos ângulos internos do tal polígono é dada por $\mathrm{S}_{ang.\,pol.} = 362^\circ + 121 \cdot (n-3)$

ou $\mathrm{S}_{ang.\,pol.} = 362^\circ + 121n - 363 \Rightarrow \mathrm{S}_{ang.\,pol.} = 121n - 1$

Observem que para $\mathrm{n} = 3 \Rightarrow \mathrm{S}_{ang.\,pol.} = 362^\circ$, $\mathrm{n} = 4 \Rightarrow \mathrm{S}_{ang.\,pol.} = 121^\circ \cdot 4 - 1 = 484^\circ - 1 = 483^\circ$

Portanto são maiores do que S_i, assim temos que detrminar a partir de que valor

$\mathrm{S}_{ang.\,pol.}$ é menor do que S_i, então fazendo:

$S_i \geq \mathrm{S}_{ang.\,pol.} \Rightarrow 180^\circ \cdot (n-2) \geq 121n - 1 \Rightarrow 180^\circ n - 360^\circ \geq 121n - 1 \Rightarrow 180^\circ n - 121n \geq -1 + 360^\circ$

$59^\circ n \geq 359^\circ \Rightarrow n \geq \dfrac{359^\circ}{59^\circ} \Rightarrow n \geq 6{,}08$ Logo $n = 7$

Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

13) Uma máquina enche um depósito de cereais na razão de seis toneladas por hora. Num determinado dia, essa máquina com a tarefa de encher três depósitos de mesma capacidade encheu o primeiro normalmente, mas apresentou um defeito e encheu os outros dois na razão de três toneladas por hora. Em média, nesse dia quantas toneladas por hora trabalhou essa máquina?

(A) 1,2 (B) 3,5 (C) 3,6 (D) 4,0 (E) 4,5

Resolvendo, temos:

6 toneladas ___________ 1 h (um depósito)

Então nesse dia:

6 toneladas ___________ 1 h (depósito 1)

6 toneladas ___________ 2 h (depósito 2)

6 toneladas ___________ 2 h (depósito 3)

Assim com os três depósitos:

18 toneladas ___________ 5 h (depósito 1, 2 e 3)

x toneladas ___________ 1 h (depósito 1, 2 e 3)

$$\Rightarrow x = \frac{18}{5} \Rightarrow x = \frac{36}{10} \Rightarrow x = 3,6$$

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

14) Uma determinada conta a pagar de valor X vence no dia 30 de novembro, mas, se for paga até o dia 30 de setembro, tem 20% de desconto sobre X e, se for paga até o dia 31 de outubro, tem 10% de desconto sobre X. Alguém reservou o valor exato Y para pagar essa conta no dia 30 de setembro, no entanto esqueceu-se de fazê-lo e só efetuou esse pagamento no dia 31 de outubro. Qual a porcentagem a mais sobre Y que terá de pagar?

(A) 10% (B) 12,5% (C) 17,5% (D) 20% (E) 25%

Resolvendo, temos:

Supondo que $x = R\$\ 100{,}00 \Rightarrow\ 100{,}00\ \times\ 20\% = R\$20{,}00$

Logo $y = R\$\ 80{,}00$

Seja "z" o valor a ser pago até 31 de outubro, então:

$10\%\ \ de\ "x" = R\$100{,}00 \Rightarrow\ 100{,}00\ \times\ 10\%\ =\ R\$10{,}00$

Logo z $= R\$\ 90{,}00$

Daí,

$80{,}00$ ___________ 100%

$90{,}00$ ___________ $x\ \%$

$$\Rightarrow x = \frac{90 \times 10\cancel{0}}{8\cancel{0}} \Rightarrow x = \frac{900}{8} \Rightarrow x = 112{,}5$$

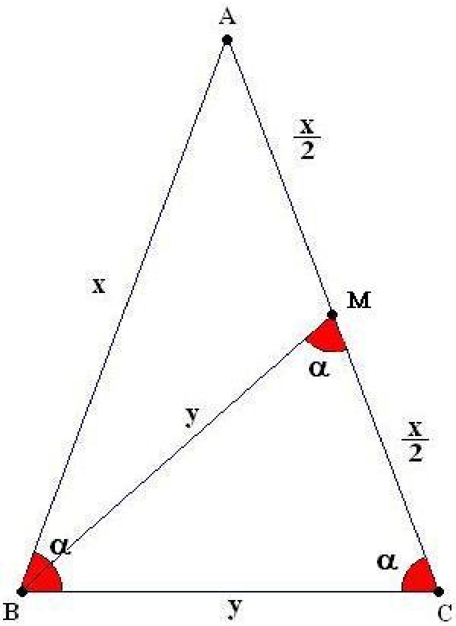
Logo a porcentagem a mais será de 12,5%

Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

15) No triângulo ABC, os lados AB e AC têm a mesma medida x e a mediana BM tem a mesma medida y do lado BC. Sendo assim, é correto afirmar que a razão $\frac{x}{y}$ é um valor compreendido entre

(A) 0 e 1 (B) 1 e 2 (C) 2 e 3 (D) 3 e 4 (E) 4 e 5



Resolvendo, temos:

$$\Delta\ ABC \sim \Delta\ BCM \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{x}{2}} \Rightarrow x \cdot \frac{x}{2} = y^2 \Rightarrow x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = y\sqrt{2}$$

Daí

$$\frac{x}{y} = \frac{\cancel{y}\sqrt{2}}{\cancel{y}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2} \cong 1,41...$$

Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

16) Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e X. Sabe-se que qualquer subconjunto de $A \cap B$ está contido em X, que por sua vez é subconjunto de $A \cup B$. Quantos são os possíveis conjuntos X?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Resolvendo, temos:

$A \cap B = \{1, 3\} \Rightarrow P(A \cap B) = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$

Os subconjuntos de $A \cap B$ são os elementos do conjunto formado por $P(A \cap B)$ logo $X = \{1, 3\}$ no mínimo, mas como $X \subset A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, temos que X poderá ser: $X = \{1, 2, 3\}$ ou $X = \{1, 3, 4\}$ ou $X = \{1, 2, 3, 4\}$, logo os possíveis conjuntos X são quatro.

Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

17) Qual é o conjunto-solução S da inequação:

$\left[(x - 1) . (x - 2)\right]^{-1} > [(x - 2) . (x - 3)]^{-1}$?

(A) $S = \{x \in IR \;/\; x < 1\}$ (B) $S = \{x \in IR \;/\; x < 1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

(C) $S = \{x \in IR \;/\; x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$ (D) $S = \{x \in IR \;/\; x < 2\}$

(E) $S = \{x \in IR \;/\; 2 < x < 3\}$

$\left[(x - 1) . (x - 2)\right]^{-1} > [(x - 2) . (x - 3)]^{-1}$ obs : se $x \neq 1,\ x \neq 2\ e\ x \neq 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x - 1) . (x - 2)} > \frac{1}{(x - 2) . (x - 3)} \Rightarrow \frac{1}{(x - 1) . (x - 2)} - \frac{1}{(x - 2) . (x - 3)} > 0$$

$$\frac{1}{(x - 1) . (x - 2)_{\diagup (x - 3)}} - \frac{1}{(x - 2) . (x - 3)_{\diagup (x - 1)}} > 0 \Rightarrow \frac{(x - 3) - (x - 1)}{(x - 1) . (x - 2). (x - 3)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x} - 3 - \cancel{x} + 1}{(x - 1) . (x - 2). (x - 3)} > 0 \Rightarrow \frac{-2}{(x - 1) . (x - 2). (x - 3)} > 0$$

Fazendo o quadro dos sinais, temos:

−		−		−		−	**- 2**
−	1	+		+		+	**x - 1**
−		−	2	+		+	**x - 2**
−		−		−	3	+	**x - 3**
+	1	−	2	+	3	−	**f (x)**

Como queremos maior do que zero então:

$x < 1$ ou $2 < x < 3$

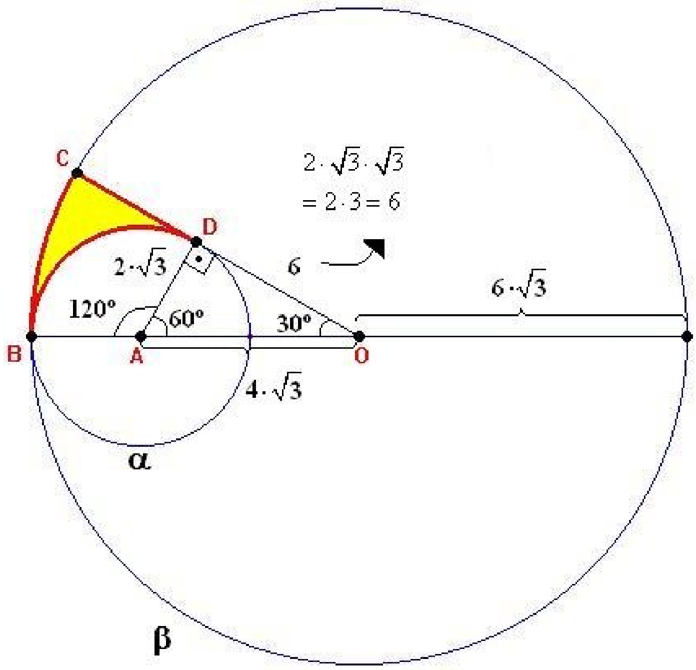
Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

18) Um círculo α de centro num ponto A e raio $2\sqrt{3}$ é tangente interior, num ponto B, a um círculo β de centro num ponto O e raio $6\sqrt{3}$. Se o raio OC é tangente a α num ponto D, a medida da área limitada pelo segmento DC e os menores arcos BC de β e BD de α é igual a

(A) $4\pi - 3\sqrt{3}$ (B) $5\pi - 4\sqrt{3}$ (C) $4\pi - 6\sqrt{3}$

(D) $5\pi - 6\sqrt{3}$ (E) $5\pi - 5\sqrt{3}$



$$S_\beta = \pi\cdot\left(6\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow S_\beta = 36\cdot 3\cdot\pi \Rightarrow S_{\text{setor de 30º de }\beta} = \frac{S_\beta}{12} \Rightarrow S_{\text{setor de 30º de }\beta} = \frac{\overset{3}{\cancel{36}}\cdot 3\cdot\pi}{\cancel{12}}$$

$$S_{\text{setor de 30º de }\beta} = 9\pi$$

$$S_\alpha = \pi\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow S_\alpha = 4\cdot 3\cdot\pi \Rightarrow S_{\text{setor de 120º de }\alpha} = \frac{S_\alpha}{3} \Rightarrow S_{\text{setor de 120º de }\alpha} = \frac{4\cdot\cancel{3}\cdot\pi}{\cancel{3}}$$

$$S_{\text{setor de 120º de }\alpha} = 4\pi$$

$$S_{\Delta\,ADO} = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}\cdot 6}{\cancel{2}} \Rightarrow S_{\Delta\,ADO} = 6\sqrt{3}$$

$$S_{\acute{A}rea\ pedida} = S_{\text{setor de 30º de }\beta} - \left(S_{\text{setor de 120º de }\alpha} - S_{\Delta\,ADO}\right) \Rightarrow S_{\acute{A}rea\ pedida} = 9\pi - \left(4\pi + 6\sqrt{3}\right)$$

$$S_{\acute{A}rea\ pedida} = 9\pi - 4\pi - 6\sqrt{3} \Rightarrow S_{\acute{A}rea\ pedida} = 5\pi - 6\sqrt{3}$$

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

19)

$$\begin{array}{c|c} a, b, c & 2 \\ a, x, x & 2 \\ a, x, x & 2 \\ a, x, x & 3 \\ x, x, x & 3 \\ x, x, x & 3 \\ x, x, x & 5 \\ x, x, 1 & 7 \\ 1, 1, 1 & \end{array}$$

No algoritmo acima, tem-se a decomposição simultânea em fatores primos dos números a, b e c, onde x está substituindo todos os números que são diferentes de a, b, c e 1. Analise as afirmativas abaixo.

I - a certamente é múltiplo de 36.
II - b certamente é múltiplo de 30.
III - c certamente é múltiplo de 35.

Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa I é falsa.
(B) Apenas a afirmativa II é falsa.
(C) Apenas a afirmativa III é falsa.
(D) Apenas as afirmativas II e III são falsas.
(E) As afirmativas I., II e III são falsas.

OBSERVAÇÃO	CONCLUSÃO
Da 1ª linha para 2ª linha	Podemos concluir que os números “b” e “c” são divisíveis por 2.
Da 4ª linha para 5ª linha	Podemos concluir que o número “a” é divisível por 3.
Da 7ª linha para 8ª linha	Podemos concluir que o número “c” é divisível por 5.
Da 8ª linha para 9ª linha	Podemos concluir que os números “a” e “b” são divisíveis por 7.

Logo podemos garantir:
a) que o número “a” é divisível por três e sete.
b) que o número “b” é divisível por dois e sete.
c) que o número “c” é divisível por dois e cinco

Da afirmativa (I) - um número para ser múltiplo de 36, tem que ser a priori divisível por dois e por três, mas o número “a” não é divisível por dois, assim a afirmativa é FALSA.
Da afirmativa (II) - um número para ser múltiplo de 30, tem que ser divisível por dois, por três e por cinco, mas pela tabela acima só podemos AFIRMAR que o número “b” é divisível por dois e por sete, assim a afirmativa é FALSA.
Da afirmativa (III) - um número para ser múltiplo de 35, tem que ser divisível por cinco e por sete, mas pela tabela acima só podemos AFIRMAR que o número “c” é divisível por dois e por cinco, assim a afirmativa é FALSA.

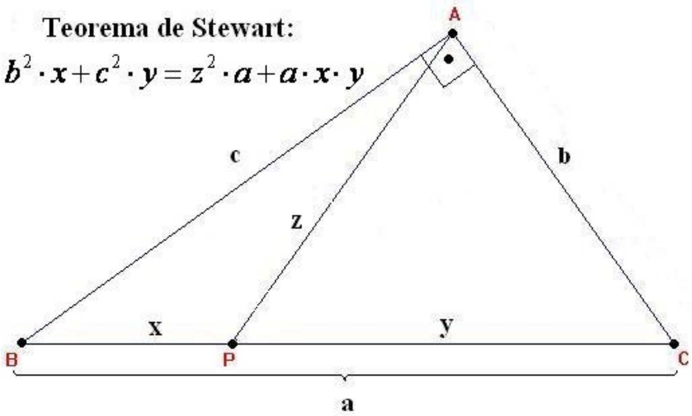
Alternativa E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

20) Num determinado triângulo escaleno ABC, o ângulo $B\widehat{A}C$ é igual a 90^{o}. Sabe-se que $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Internamente ao segmento BC, determina-se o ponto P de modo que $BP = \dfrac{(c+b)\cdot(c-b)}{a}$, o perímetro do triângulo APC é dado pela expressão:

(A) $\dfrac{2b\cdot(a+b)}{a}$ (B) $\dfrac{2c\cdot(a+b)}{a}$ (C) $\dfrac{2b\cdot(b+c)}{a}$

(D) $\dfrac{2c\cdot(b+c)}{a}$ (E) $\dfrac{2b\cdot(a+c)}{a}$



Usando o teorema de Pitágoras $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$$BP = \frac{(c+b)\cdot(c-b)}{a} \Rightarrow BP = \frac{c^2-b^2}{a}$$

$$BC = BP + PC \Rightarrow PC = BC - BP \Rightarrow PC = a - \frac{c^2-b^2}{a} \Rightarrow PC = -\frac{a^2-c^2+b^2}{a}$$

$$\Rightarrow PC = -\frac{b^2 \cancel{+c^2} \cancel{-c^2} + b^2}{a} \Rightarrow PC = \frac{2b^2}{a}$$

Usando o teorema de STEWART, vem:

$$b^2 \times \frac{c^2-b^2}{a} + c^2 \times \frac{2b^2}{a} = x^2 \times a + a \times \frac{c^2-b^2}{a} \times \frac{2b^2}{a} \Rightarrow \frac{b^2c^2-b^4}{a} + \frac{2b^2c^2}{a} = x^2a + \cancel{a} \times \frac{2b^2c^2-2b^4}{\cancel{a} \times a}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2c^2-b^4}{a} + \frac{2b^2c^2}{a} = x^2a + \frac{2b^2c^2-2b^4}{a} \Rightarrow x^2 = \frac{b^2c^2-b^4}{a} + \frac{2b^2c^2}{a} - \frac{\left(2b^2c^2-2b^4\right)}{a}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{b^2c^2 \cancel{-b^4} \cancel{+2b^2c^2} \cancel{-2b^2c^2} + \cancel{2}^{1}b^4}{a^2} \Rightarrow x^2 = \frac{b^2c^2+b^4}{a^2} \Rightarrow x^2 = \frac{b^2\left(c^2+b^2\right)}{a^2} \Rightarrow x^2 = \frac{\cancel{a^2}\cdot b^2}{\cancel{a^2}}$$

$$x^2 = b^2 \Rightarrow x = b$$

$$Daí \quad 2P = AP + PC + AC \Rightarrow 2P = b + \frac{2b^2}{a} + b \Rightarrow 2P = \frac{2ab}{a} + \frac{2b^2}{a} \Rightarrow 2P = \frac{2b\cdot(a+b)}{a}$$

Alternativa A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006