RESOLUÇÃO DA PROVA DO COLÉGIO NAVAL DE 2007:

1) Qual é a soma das raízes quadradas da equação do 2º grau $x^2-6x+2=0$?

a) $\left(6+2\cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$ b) $\left(6+2\cdot 3^{1/2}\right)^{1/2}$ c) $\left(3+2\cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$

d) $\left(3+2\cdot 3^{1/2}\right)^{1/2}$ e) $\left(3+3\cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$

Resolução:

$$x^2-6x+2=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4a\cdot c \Rightarrow \Delta=36-4\cdot1\cdot2 \therefore \Delta=28$$

$$x'=\frac{6+2\sqrt{7}}{2} \quad e \quad x''=\frac{6-2\sqrt{7}}{2} \Rightarrow x'=3+\sqrt{7} \quad e \quad x''=3-\sqrt{7}$$

$$Assim\ \text{S}=\sqrt{3+\sqrt{7}}+\sqrt{3-\sqrt{7}} \Rightarrow S^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{7}}\right)^2+2\cdot\left(\sqrt{3+\sqrt{7}}\right)\cdot\left(\sqrt{3-\sqrt{7}}\right)+\left(\sqrt{3-\sqrt{7}}\right)^2$$

$$S^2=3+\sqrt{7}+2\cdot\left(\sqrt{\left(3+\sqrt{7}\right)\cdot\left(3-\sqrt{7}\right)}\right)+3-\sqrt{7} \Rightarrow S^2=3+\cancel{\sqrt{7}}+2\cdot\sqrt{9-7}+3-\cancel{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow S^2=6+2\sqrt{2} \Rightarrow S=\sqrt{6+2\sqrt{2}}$$

ALTERNATIVA A

2) Se $x+y=2$ e $\left(x^2+y^2\right)/\left(x^3+y^3\right)=4$, então $x\cdot y$ é igual a

a) 12/11 b) 13/11 c) 14/11 d) 15/11 e) 16/11

Resolução:

$$\frac{x^2+y^2}{\underbrace{(x+y)}_{2}\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)}=4 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)}=4 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{\left(x^2-xy+y^2\right)}=8(1)$$

$$(x+y)^2=2^2 \Rightarrow x^2+y^2+2xy=4 \Rightarrow x^2+y^2=4-2xy\ (2)$$

$$assim,\ pondo\ (2)\ em\ (1),\ temos:$$

$$\frac{4-2xy}{(4-2xy-xy)}=8 \Rightarrow \frac{4-2xy}{(4-3xy)}=8 \Rightarrow 4-2xy=8\cdot(4-3xy) \Rightarrow 4-2xy=32-24xy$$

$$\Rightarrow 24xy-2xy=32-4 \Rightarrow 22xy=28 \Rightarrow xy=\frac{28}{22} \Rightarrow xy=\frac{\overbrace{\cancel{28}}^{14}}{\underbrace{\cancel{22}}_{11}} \Rightarrow xy=\frac{14}{11}$$

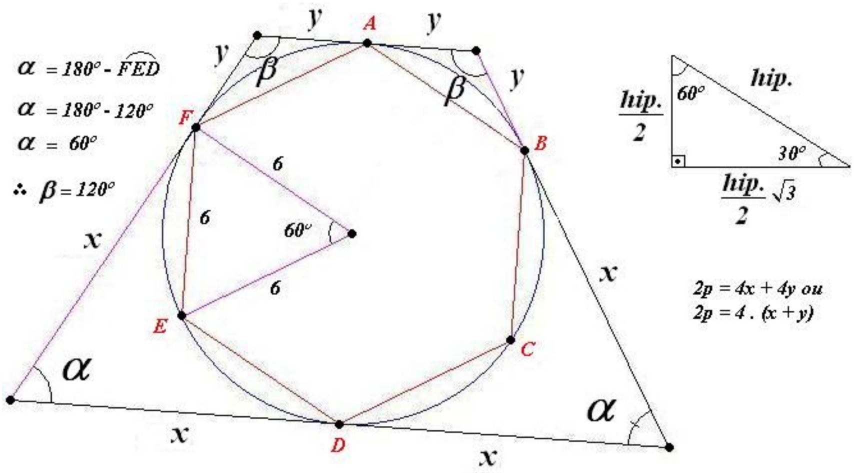
ALTERNATIVA C

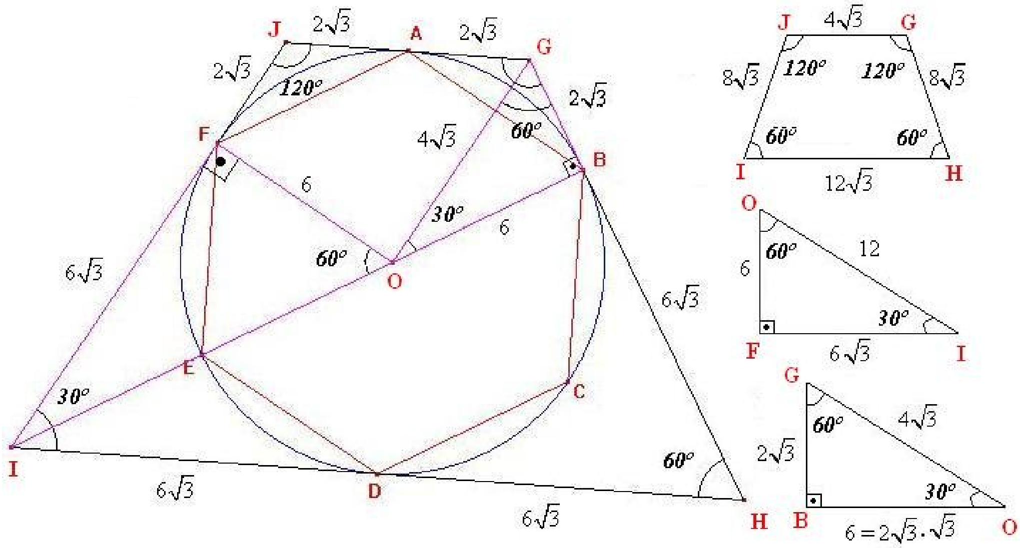
Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

3) Um hexágono regular ABCDEF está inscrito em uma circunferência de raio 6. Traçam-se as tangentes à circunferências nos pontos A, B, D e F, obtendo-se, assim, um quadrilátero circunscrito a essa circunferência. Usando-se 1,7 para raiz quadrada de 3, qual é o perímetro desse quadrilátero?

a) 54,4 b) 47,6 c) 40,8 d) 34,0 e) 30,6

Resolução:





Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

Fazendo as figuras acima *de acordo com o enunciado, temos*:

$\alpha = 180^o - \widehat{FED}$, *pois IF e ID são* tangentes $\Rightarrow \alpha = 180^o - 120^o \Rightarrow \alpha = 60^o$ *daí* $\beta = 120^o$.

Por outro lado sabemos que o lado hexágono incrito em uma circunferência é igual ao raio dessa circunferência assim $l_6 = R = 6$, *com os triângulos retângulos de ângulos* 30 / 60 *podemos* determinar x *e* y *e consequentemente* $2p = 4x + 4y \Rightarrow 2p = 4\cdot(x+y)$,

fazendo isso encontramos $x = 6\sqrt{3}$ *e* $y = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2p = 4\cdot(x+y) \Rightarrow 2p = 4\cdot\left(6\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow 2p = 4\cdot 8\sqrt{3} \Rightarrow 2p = 32\sqrt{3} \Rightarrow 2p = 32\cdot 1,7 \Rightarrow 2p = 54,4$

ALTERNATIVA A

4) Qual será o dia da semana na data 17 de setembro de 2009?

a) 2ª feira b) 3ª feira c) 4ª feira d) 5ª feira e) 6ª feira

Resolução:

Nessa questão o aluno tinha que observar que 2008 será um ano bissexto, ou seja, terá 366 dias. Um ano é bissexto se é múltiplo de quatro, se o ano terminar em “oo” (zero, zero), ou seja, for múltiplo de 100, terá que ser divisível por quatrocentos (400), observe que 1900 não foi bissexto e nem 2100 o será, mas 2000 foi bissexto e 2400 será bissexto.

Vamos contar os dias restantes de 2007					
AGO	SET	OUT	NOV	DEZ	TOTAL
31	30	31	30	31	153 DIAS

Vamos contar os dias de 2009									
JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	TOTAL
31	27	31	30	31	30	31	30	17	260 DIAS

Assim somando esses valores, temos: 153 + 260 + 366 = 779

Observando que primeiro de agosto de 2007 (1º AGO 2007) é uma QUARTA-FEIRA, somando-se 777 dias, teremos 1 + 777 = 778 dias, que será uma QUARTA-FEIRA, logo somando-se mais um dia, teremos 778 + 1 = 779 dias, que será QUINTA-FEIRA.

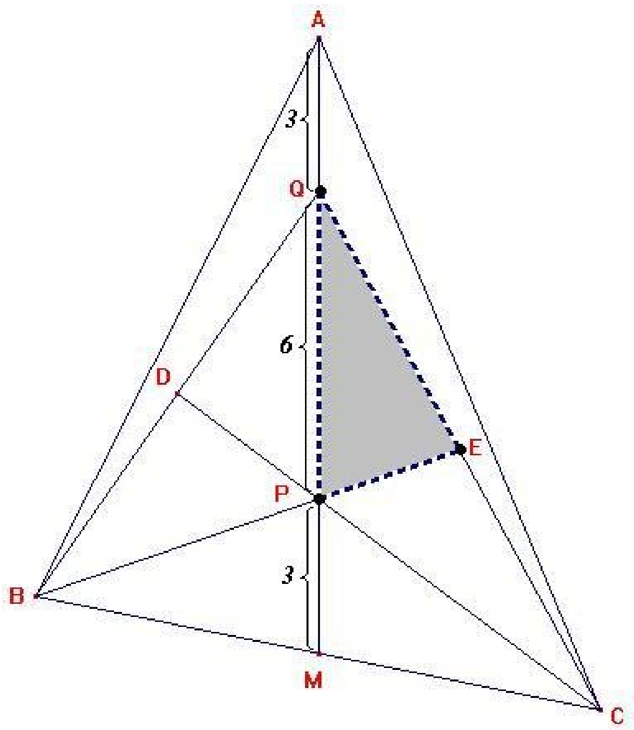
ALTERNATIVA D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

5) Dado um triângulo ABC de área 72, sobre a mediana AM=12, traçam-se os segmentos AQ=3 e QP=6. Sabendo-se que E é o ponto de intersecção entre as retas BP e QC, qual é a área do triângulo QPE?

a) 6 b) 8 c) 9 d) 12 e) 18

Resolução:



Fazendo a figura conforme o enunciado, ligue os pontos "Q" e "B" formando assim o triângulo BQC, observe que o ponto "P" é BARICENTRO do triângulo BQC, assim traçando a MEDIANA que falta, temos seis triângulos que podemos mostrar que possuem a mesma área, do mesmo modo pode-se mostrar que as áreas dos triângulos ACQ e PCM são iguais, desse modo podemos concluir que a área do triângulo ABC ficou dividida por oito.

$$Daí,\ \Delta QPE = \frac{72}{8} = \ 9\ u.a$$

ALTERNATIVA C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

6) Dois amigos compraram um rifa por R$ 20,00, cujo prêmio é de R$ 1.000,00. Um deles deu R$ 15,00, e, o outro, R$ 5,00. Caso sejam contemplados, quantos reais a mais deverá receber o que deu a maior parte?

a) R$ 250 b) R$ 300 c) R$ 450 d) R$ 500 e) R$ 750

Resolução:

1ª solução: (ÁLGEBRA)

Divisão de R$ 1000,00 em partes diretamente proporcionais a R$ 15,00 e R$ 5,00. Sejam X e Y as partes, temos:

$$\begin{cases} x+y=1000 \\ \dfrac{x}{15}=\dfrac{y}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1000 \\ \dfrac{x}{15}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{x+y}{20} \Rightarrow \dfrac{x}{15}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{1000}{20}=50 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{x}{15}=50 \Rightarrow x=15\cdot 50=750 \; e \; y=250$$

$$x-y=750-250=500$$

ALTERNATIVA D

2ª solução: (ARITMÉTICA)

$$15+5=20 \Rightarrow 1000 \div 20 = 50$$

$$Assim \; 15\times 50=750 \;\; e \;\; 5\times 50=250$$

$$Daí \;\; 750-250=500$$

ALTERNATIVA D

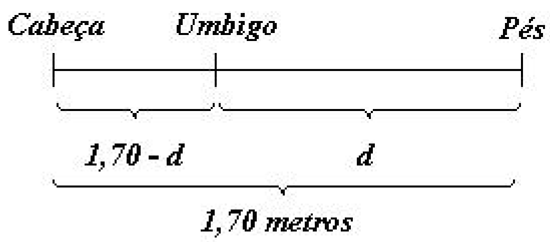
Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

7) Teoricamente, num corpo humano de proporções perfeitas, o umbigo deve estar localizado num ponto que divide a altura da pessoa na média e extrema razão (razão áurea), com a distância, aos pés maior que a distância à cabeça. A que distância, aproximadamente, deverá estar localizado o umbigo de uma pessoa com 1,70m de altura, para que seu corpo seja considerado em proporções perfeitas?

Dados:
- Usar 2,24 para raiz quadrada de 5

a) 1,09 b) 1,07 c) 1,05 d) 1,03 e) 1,01

Resolução:



$$\frac{d}{1,7}=\frac{1,7-d}{d}\Rightarrow d^2=1,7\cdot(1,7-d)\Rightarrow d^2=1,7^2-1,7d\Rightarrow d^2+1,7d-1,7^2=0$$

$$\Delta=1,7^2-4\cdot1\cdot(-1,7^2)\Rightarrow\Delta=1,7^2+4\cdot1,7^2\Rightarrow\Delta=5\cdot1,7^2\Rightarrow d=\frac{-1,7\pm1,7\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore d'=\frac{1,7\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}\Rightarrow d'\cong\frac{1,7(2,24-1)}{2}\Rightarrow d'\cong0,62\times1,7\Rightarrow d'\cong1,054$$

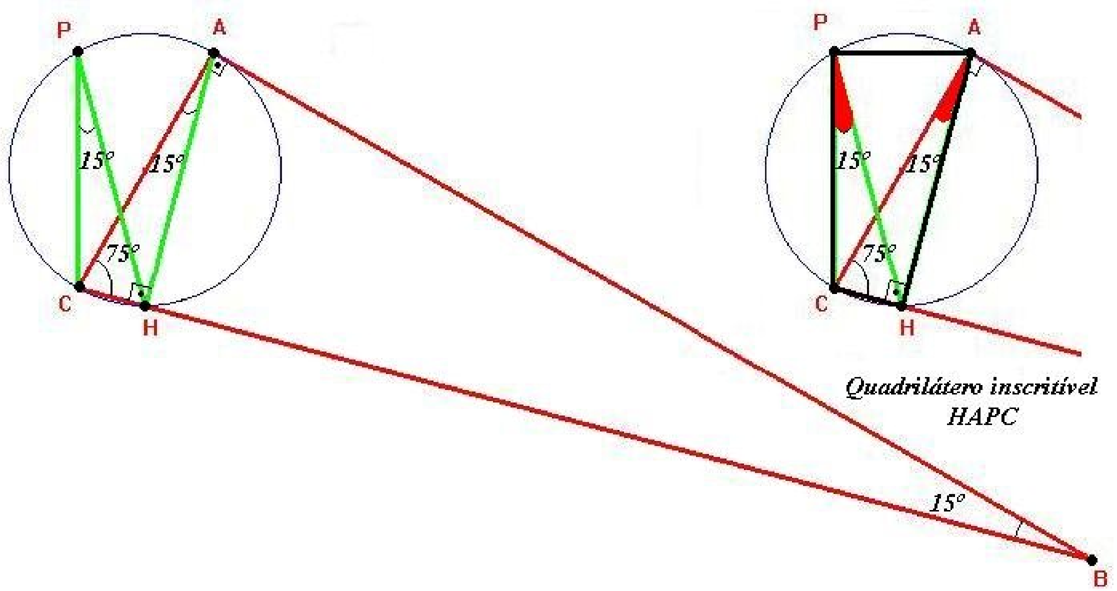
Observe que $d=\frac{-1,7-1,7\sqrt{5}}{2}$ *não serve, pois é negativo.*

ALTERNATIVA C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarloslloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

8) ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa BC e altura AH. Seja P um ponto do mesmo semi plano de A em relação à reta suporte BC. Os ângulos HPC e ABC são iguais a 15º. Se o segmento PH é o maior possível, pode-se afirmar que PH é igual a:
a) AC b) AB c) BC/2 d) HC/2 e) AH

Resolução:



Outra questão envolvendo o conceito de quadrilátero inscritível, Fazendo a figura conforme o enunciado e sendo "P" um ponto do mesmo semi-plano do ponto "A", em relação ao segmento de reta BC, podemos notar que o ângulo $H\widehat{A}C = 15º$ e como $H\widehat{P}C = 15º$, temos que o quadrilátero HAPC é inscritível e assim sendo AC é diâmetro (pois o ângulo $A\widehat{H}C=90º$) da circunferência que circunda o quadrilátero HAPC, como PH deve ser o maior possível então PH tem que ser diâmetro ou sela PH = AC.

ALTERNATIVA A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

9) Qual é a soma dos valores reais de x que satisfazem a equação
$x^2 - 3x + 1 + (x^2 - 3x+2)^{-1} = 1$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Resolução:

$$x^2 - 3x + 1 + \left(x^2 - 3x + 2\right)^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow Somando - se\ um\ aos\ dois\ menbros, temos:$$

$$x^2 - 3x + 2 + \left(x^2 - 3x + 2\right)^{-1} = 2$$

$$\Rightarrow seja\ \ y = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow y + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y^2 + 1 = 2y \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \quad \therefore y' = y'' = 1$$

$$Asim\ \ x^2 - 3x + 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

Logo como $S = \dfrac{-b}{a} \Rightarrow S = \dfrac{-(-3)}{1} \Rightarrow S = 3$

ALTERNATIVA D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarloslloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

10) Em um número natural N de 9 algarismos,tem-se: os algarismos das unidades simples, unidades de milhar e unidade de milhão iguais a x; os algarismos das dezenas simples, dezenas de milhar e dezenas de milhão iguais a y; e os algarismos das centenas simples, centenas de milhar e centenas de milhão iguais a z. Pode-se afirmar que N sempre será divisível por:

a) 333664 b) 333665 c) 333666 **d) 333667** e) 333668

1ª solução:
Aparentemente uma questão difícil, mas as repostas tornaram a questão fácil, se não vejamos:
Sendo N=ZYXZYXZYX, temos:
Se X não for **par** então, as alternativas A, C e E não **são respostas possíveis**.
Do mesmo modo se X **não for ZERO ou CINCO** então B **não é resposta possível**, daí por exclusão só sobra à alternativa D e a questão ficou **FÁCIL.**
Observe que o valor de N não pode depender de X ser par ou impar.

2ª solução: (SEPARANDO EM ORDENS)
Sendo N=ZYXZYXZYX, temos:

$$\mathrm{N} = \mathrm{ZYXZYXZYX} \Rightarrow N = Z\cdot 10^8 + Y\cdot 10^7 + X\cdot 10^6 + Z\cdot 10^5 + Y\cdot 10^4 + X\cdot 10^3 + Z\cdot 10^2 + Y\cdot 10 + X$$

$$\Rightarrow N = Z\cdot\left(10^8+10^5+10^2\right)+Y\cdot\left(10^7+10^4+10\right)+X\cdot\left(10^6+10^3+1\right)$$

$$\Rightarrow N = Z\cdot 10^2\cdot\left(10^6+10^3+1\right)+Y\cdot 10\left(10^6+10^3+1\right)+X\cdot\left(10^6+10^3+1\right)$$

$$\Rightarrow N = \left(10^6+10^3+1\right)\cdot\left(Z\cdot 10^2+Y\cdot 10+X\right)$$

$$\Rightarrow N = \left(1000000+1000+1\right)\cdot\left(Z\cdot 10^2+Y\cdot 10+X\right)$$

$$\Rightarrow N = \left(1001001\right)\cdot\left(100Z+10Y+X\right) \text{ observe que 1001001 } \acute{e} \text{ divis}\acute{\imath}\text{vel por 3, da}\acute{\imath}$$

$$\Rightarrow N = 3\cdot\left(333667\right)\cdot\left(100Z+10Y+X\right) \text{ Logo, N } \acute{e} \text{ sempre divis}\acute{\imath}\text{vel por 333667, alternativa D.}$$

3ª solução: (SEPARANDO EM CLASSES)

$$\mathrm{N} = \mathrm{ZXYZXYZXY} = (\mathrm{ZXY})10^6 + (\mathrm{ZXY})10^3 + (\mathrm{ZXY})10$$

$$= (\mathrm{ZXY})\left(10^6+10^3+10\right) = (\mathrm{ZXY})(1001001) = 3\cdot(333667)(\mathrm{ZXY}).$$

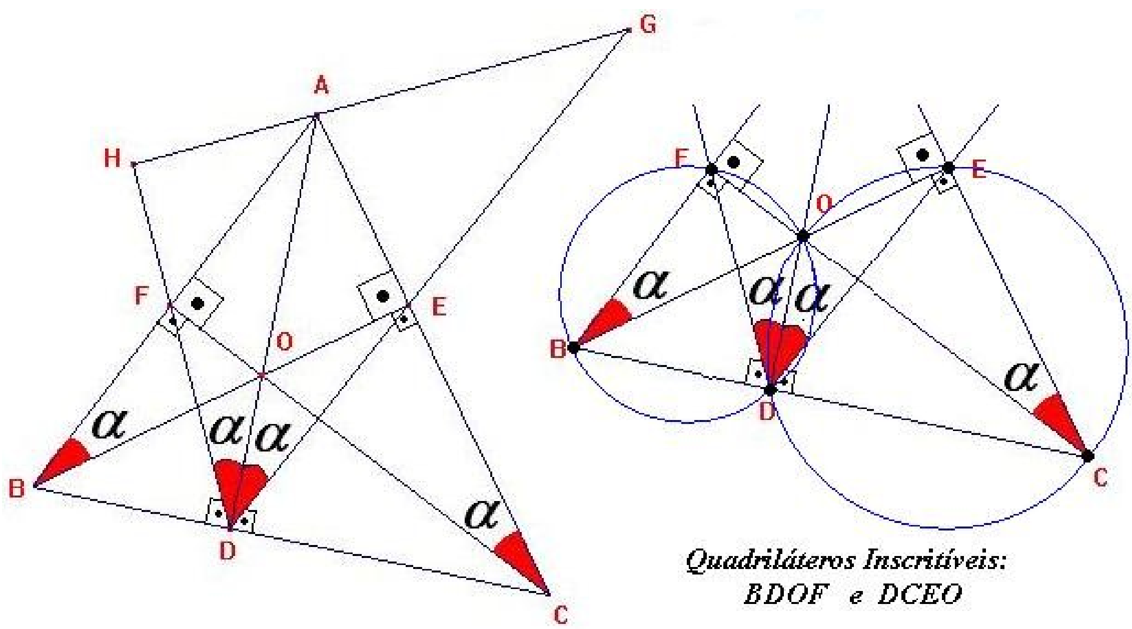
Logo, N é sempre divisível por 333667, alternativa D.

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

11) Num triângulo acutângulo qualquer ABC, os pontos D, E e F são, respectivamente, os pés das alturas AD, BE e CF. Traçam-se, a partir de D, as semi-retas DE e DF. Uma reta r passa por A, intersectando a semi-reta DE em G e a semi-reta DF em H. Qualquer que seja a reta r, pode-se afirmar que

a) AG:AH :: DG:DH b) EG:DE :: FH:DF c) DG:DH :: DE:DF
d) AG:GE :: AH:HF e) DE:AG :: DF:AH

Resolução:



$Observe que\ os\ ângulos\ A\hat{B}E\ e\ A\hat{C}F\ são\ congruentes\left(pois\ \Delta\ ABE \sim \Delta\ ACF\right) \Rightarrow A\hat{B}E \equiv A\hat{C}F$

Repare $que\ os\ quadriláteros\ BDOF\ e\ DCEO\ são\ inscritíveis\ (pois\ possuem\ um\ par\ de\ ângulos$

$opostos\ iguais\ a\ 90^o),\ Assim\ os\ ângulos\ O\hat{D}F \equiv O\hat{B}F = A\hat{B}E\ e\ O\hat{D}E \equiv O\hat{C}E = A\hat{C}F,$

$Daí\ DA\ é\ bissetriz\ do\ ângulo\ G\widehat{H}D\ do\ triângulo\ GDH.$

$Em\ particular\ (usando\ o\ Teorema\ da\ Bissetriz\ Interna\ no\ triângulo\ GDH),\ temos:$

$$\frac{DH}{AH} = \frac{DG}{AG} \Rightarrow \frac{AG}{AH} = \frac{DG}{DH}$$

ALTERNATIVA A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

12) Uma dívida, contraída à taxa de juros simples de 10% ao mês, deverá ser paga em duas parcelas, respectivamente iguais a R$ 126,00, daqui a 4 meses, e R$ 192,00, daqui a 6 meses. Caso essa mesma dívida fosse paga em duas parcelas iguais, uma daqui a 4 meses, e a outra daqui a 6 meses, qual seria a diferença entre as somas dos valores pagos em cada caso?

a) R$ 4,30   b) R$ 4,40   c) R$ 4,50   d) R$ 4,60   e) R$ 4,70

Resolução:

$$126+192 = x\cdot 1,4 + y\cdot 1,6 \Rightarrow \underbrace{126+192}_{318} = \underbrace{x\cdot 1,4}_{126} + \underbrace{y\cdot 1,6}_{196}$$

$$\text{seja "d" a dívida } \Rightarrow \ d = x + y = \frac{126}{1,4} + \frac{192}{1,6} = \frac{630}{7} + \frac{960}{8} = 90 + 120$$

$$d = 210$$

Agora queremos determinar A e B tais que:

$$\begin{cases} A + B = 210 \\ A\cdot 1,4 = B\cdot 1,6 \end{cases}$$

$$ou$$

$$\begin{cases} A + B = 210 \\ 7A = 8B \Rightarrow A = \dfrac{8B}{7} \end{cases}$$

$$como\ A + B = 210 \Rightarrow \frac{8B}{7} + B = 210 \Rightarrow \frac{8B}{7} + \frac{7B}{7} = 210 \Rightarrow 15B = 210\cdot 7$$

$$B = \frac{210\cdot 7}{15} \Rightarrow B = \frac{\cancel{3}\cdot 7\cdot \cancel{5}\cdot 2\cdot 7}{\cancel{15}} \Rightarrow B = 98 \ \therefore A = 112$$

$$\text{logo } \ \underbrace{112\cdot 1,4}_{156,80} = \underbrace{98\cdot 1,6}_{156,80} = 156,80 \ valor\ a\ ser\ pago$$

$$156,80\cdot 2 = 313,60 \Rightarrow 318 - 313,60 = 4,40$$

ALTERNATIVA B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

13) Sabe-se que $a^3 - 3a + 1 = 93$ e $K = a^4 - 6a + 1$. Logo, K também pode ser expresso por:

$a)$ $3a^2 + 86a + 1$ $b)$ $3a^2 + 84a + 1$ $c)$ $6a^2 + 86a + 1$

$d)$ $6a^2 + 84a + 1$ $d)$ $9a^2 + 86a + 1$

Resolução:

$$a^3 - 3a + 1 = 93 \Rightarrow a^3 = 93 + 3a - 1 \Rightarrow a^3 = 92 + 3a \ (1)$$

$$k = a \cdot (a^3 - 6) + 1 \ (2)$$

$Assim\ pondo\ (1)\ em\ (2),\ vem:$

$$k = a \cdot (92 + 3a - 6) + 1 \Rightarrow k = a \cdot (86 + 3a) + 1 \Rightarrow k = 3a^2 + 86a + 1$$

ALTERNATIVA A

14) Em uma classe de x alunos, o professor de matemática escreveu, no quadro de giz, um conjunto A de n elementos. A seguir, pediu que, por ordem de chamada, cada aluno fosse ao quadro e escrevesse um subconjunto de A, diferente dos que já foram escritos pelos. Depois de cumprirem com a tarefa, o professor notou que ainda existiam subconjuntos que não haviam sido escritos pelos alunos. Passou a chamá-los novamente, até que o 18º aluno seria obrigado a repetir um dos subconjuntos já escritos. O valor mínimo de x, que atende às condições dadas, está entre:

a) 24 e 30 b) 29 e 35 c) 34 e 40 d) 39 e 45 e) 44 e 50

Resolução:

Dado um conjunto A com "n" elementos, dizemos que o conjunto das partes ou conjunto potência do conjunto A é um conjunto, tal que o seu número de elementos é dado por $P(A) = 2^n$ ou seja o número de elementos é sempre uma potência de dois, assim se:

Número de elementos do conjunto A	$\varnothing$	1	2	3	4	5	6	7
Número de elementos do conjunto P(A)	1	2	4	8	16	32	64	128

Observe que o professor foi obrigado a repetir os alunos, assim a priori na classe temos $18\ alunos$, assim sendo teríamos 35 $(18 \times 2 = 36 - 1 = 35)$ subconjuntos, mas como P(A) tem que ser uma potência de dois, nesse caso a potência mais próxima seria igual a 64, logo na classe temos $64 - 17 = 47$ alunos no mínimo.

ALTERNATIVA E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

15) Um reservatório deve ser enchido completamente com uma mistura de 76% de gasolina e 24% de álcool. A torneira que fornece gasolina enche este tanque, sozinha, em 4 horas, e a torneira que fornece álcool enche este tanque, sozinha, em 6 horas. Abrindo-se essas torneiras no mesmo instante, quanto tempo a mais uma delas deve ser deixada aberta, depois de a outra ser fechada, para que as condições estabelecidas sejam satisfeitas?

a) 1h 30 min b) 1h 36 min c) 1h 42 min d) 1h 48 min e) 1h 54 min

Resolução:

Supondo que o reservatório possui 100 litros, temos:

Para a torneira que fornece gasolina, temos:

100 litros ___________ 240 min

76 litros ___________ x

$$\Rightarrow x = \frac{76 \cdot 24\cancel{0}}{10\cancel{0}} \Rightarrow x = \frac{76 \cdot 24}{10}$$

Para a torneira que fornece álcool, temos

100 litros ___________ 360 min

24 litros ___________ y

$$\Rightarrow y = \frac{24 \cdot 36\cancel{0}}{10\cancel{0}} \Rightarrow y = \frac{24 \cdot 36}{10}$$

$$\text{Assim } x - y = \frac{76 \cdot 24}{10} - \frac{24 \cdot 36}{10} = \frac{24 \cdot (76 - 36)}{10} = \frac{24 \cdot 4\cancel{0}}{\cancel{10}} = 96$$

$$\textit{Daí} \quad x - y = 96\,\text{min} \quad \textit{ou} \quad x - y = 1\text{h e } 36 \text{ min}$$

ALTERNATIVA B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

16) Um móvel P1 parte, no sentido horário, do ponto A de uma circunferência K1 de diâmetro AB = 2 e, no mesmo instante, um outro móvel P2 parte, no sentido anti-horário, do ponto C de uma circunferência K2 de diâmetro BC = 4. Sabe-se que:

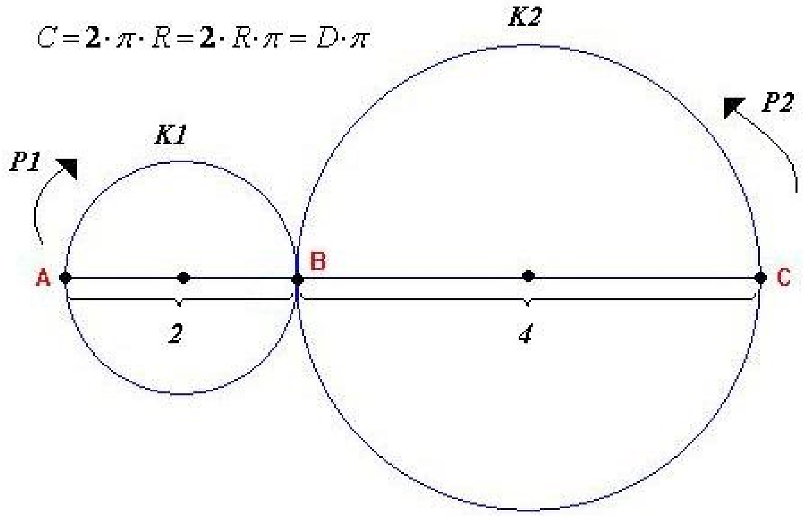
- A, B e C são colineares;
- P1 e P2 têm velocidade constante;
- K1 e K2 são tangentes exteriores em B;
- P1 e P2 mudam de circunferência todas as vezes que passam pelo ponto B;
- P2 leva 4 segundos para dar uma volta completa em K2;
- O primeiro encontro de P1 e P2 ocorre no ponto B, quando eles passam pela terceira vez por este ponto.

Quantos segundos leva P1 para dar uma volta completa em K1?

a) 24/7 b) 22/7 c) 20/7 d) 18/7 e) 16/7

Resolução:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot R \cdot \pi = D \cdot \pi$$



Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

Do enunciado podemos montar o quadro abaixo:

	1ª passagem pelo ponto "B", distância percorrida	2ª passagem pelo ponto "B", distância percorrida		3ª passagem pelo ponto "B", distância percorrida	
Móvel "P1"	Do ponto "A" até o ponto "B" percorre π unidades de comprimentos	Do ponto "B" até o ponto "C" percorre 2π unidades de comprimentos	Do ponto "C" até o ponto "B" percorre 2π unidades de comprimentos	Do ponto "B" até o ponto "A" percorre π unidades de comprimentos	Do ponto "A" até o ponto "B" percorre π unidades de comprimentos
Móvel "P2"	Do ponto "C" até o ponto "B" percorre 2π unidades de comprimentos	Do ponto "B" até o ponto "A" percorre π unidades de comprimentos	Do ponto "A" até o ponto "B" percorre π unidades de comprimentos	Do ponto "B" até o ponto "C" percorre 2π unidades de comprimentos	Do ponto "C" até o ponto "B" percorre 2π unidades de comprimentos

Do quadro anterior, podemos concluir que, enquanto o móvel "P2" percorreu 8π unidades de comprimentos, o móvel "P1" percorreu 7π unidades de comprimentos. Como o móvel "P2" leva quatro segundos para dar uma volta completa na circunferência "K2" (que possui 4π unidades de comprimentos) e pelo enunciado as velocidades dos móveis são constantes, então em 8π unidades de comprimentos percorridos gastará oito segundos, do mesmo modo o móvel "P1", gastou os mesmos oito segundos para percorrer 7π unidades de comprimentos para ocorrência do primeiro encontro, assim sendo, para percorrer 2π unidades de comprimentos o móvel "K1" gastará:

$$7\pi \underline{\hspace{3cm}} 8 \; segundos$$
$$2\pi \underline{\hspace{3cm}} x$$
$$\Rightarrow x = \frac{2\cancel{\pi}\cdot 8}{7\cancel{\pi}} \Rightarrow x = \frac{16}{7}$$

ALTERNATIVA E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

17) Sabendo-se que um grado é a centésima parte de um ângulo reto, quantos grados tem o ângulo de 45º 36’ 54’’ ?
a) 50,48333... b) 50,58333... c) 50,68333... d) 50,78333... e) 50,88333...

Resolução:

$$90^{\circ} \underline{\qquad\qquad} 100gr \quad \Rightarrow \quad 45^{\circ} \underline{\qquad\qquad} 50gr \quad \Rightarrow \quad 0,9^{\circ} \underline{\qquad\qquad} 1gr$$

$$1^{\circ} \underline{\qquad\qquad} 60' \underline{\qquad\qquad} 60''$$

$$60 \times 0,9 = 54$$

$$54' \underline{\qquad\qquad} 1gr$$

$$36' \underline{\qquad\qquad} x$$

$$\Rightarrow x = \frac{36 \cdot 1}{54} = \frac{2}{3} = 0,666...$$

$$3600 \times 0,9 = 3240$$

$$3240'' \underline{\qquad\qquad} 1gr$$

$$54'' \underline{\qquad\qquad} y$$

$$\Rightarrow y = \frac{54 \cdot 1}{3240} = \frac{1}{60} = 0,01666...$$

$$x + y = 0,666... + 0,01666... = 0,68333...$$

$$\text{ou} \quad x - y = \frac{2}{3} + \frac{1}{60} \Rightarrow x - y = \frac{40}{60} + \frac{1}{60} \Rightarrow x - y = \frac{41}{60} \Rightarrow x - y = 0,68333...$$

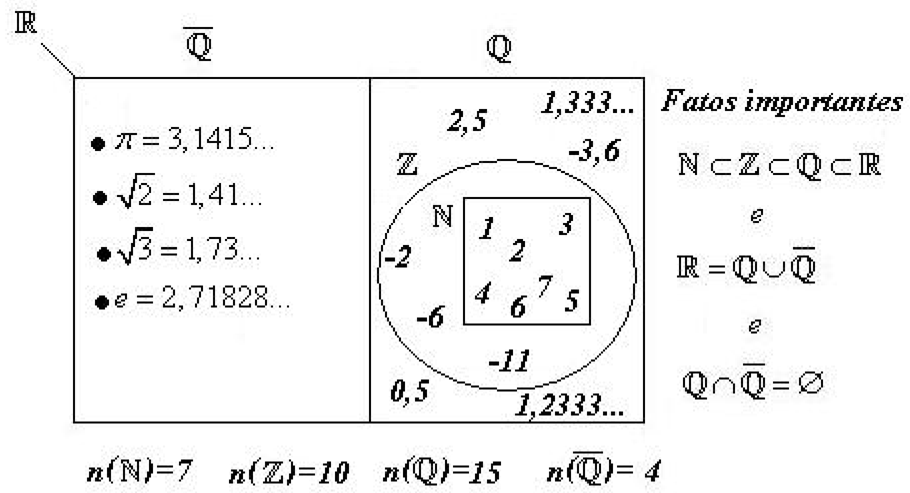
ALTERNATIVA C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

18) Os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais foram denominados A, B e C, não necessariamente nessa ordem. Em um grupo de 19 números reais, sabe-se que 4 são irracionais, 7 pertencem a C e 10 pertencem a A. Quantos desses números pertencem, exclusivamente, ao conjunto B?

a) 3 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Resolução:



Assim o conjunto "C" possui sete elementos, sendo assim deve ser o conjunto dos números Naturais.

O conjunto "A" possui dez elementos, sendo sete pertencentes ao conjunto "C" (NATURAIS) e três pertencentes ao conjunto "A" exclusivamente, logo "A" é o conjunto dos números inteiros.

O conjunto "B" possui quinze elementos, pois, do total de dezenove elementos, quatro são números Irracionais, logo quinze são números Racionais e, portanto cinco números pertencem ao conjunto dos números Racionais exclusivamente.

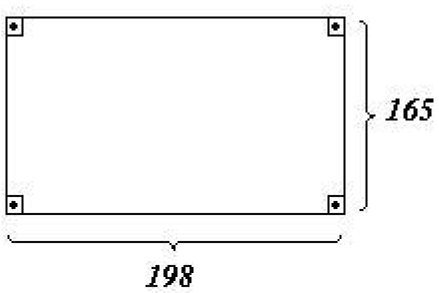
ALTERNATIVA B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

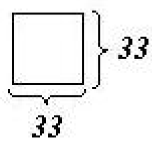
19) Deseja-se revestir uma área retangular, de 198 cm de comprimento e 165 cm de largura, com um número exato de lajotas quadradas, de tal forma que a medida do lado dessas lajotas, expressa por um número inteiro em cm, seja a maior possível. Quantas lajotas deverão ser usadas?

a) 27 b) 30 c) 33 d) 36 e) 38

Resolução:



	1	5
198	165	33
33	0	



$S_{\text{▭}} = 165 \times 198 \ (1)$

$S_{\square} = 33 \times 33 \ (2)$

$Dividindo \ (1) \ por \ (2), \ vem:$

$$\frac{S_{\text{▭}}}{S_{\square}} = \frac{165 \times 198}{33 \times 33} \Rightarrow \frac{S_{\text{▭}}}{S_{\square}} = \frac{\cancel{\overbrace{165}^{15}} \times \cancel{\overbrace{198}^{18}}}{\underbrace{33}_{3} \times \underbrace{33}_{3}} \Rightarrow \frac{S_{\text{▭}}}{S_{\square}} = \frac{15 \times \cancel{\overbrace{18}^{2}}}{\cancel{3} \times \cancel{3}} \Rightarrow \frac{S_{\text{▭}}}{S_{\square}} = 15 \times 2 \Rightarrow \frac{S_{\text{▭}}}{S_{\square}} = 30$$

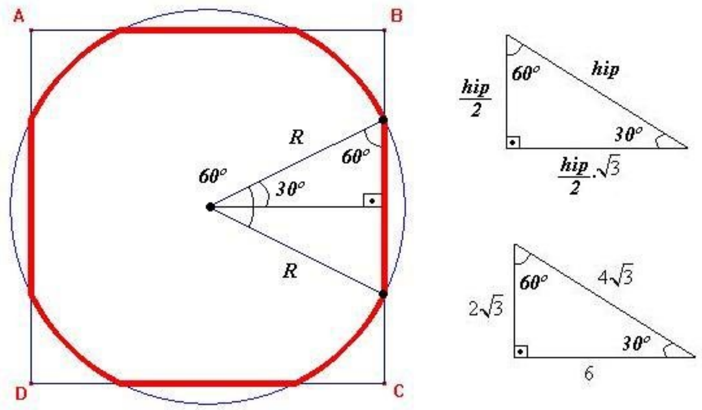
ALTERNATIVA B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

20) Com a “ponta seca” de um compasso, colocada no centro de um quadrado de lado 2, traça-se uma circunferência de raio r. Observa-se que cada arco da circunferência, externo ao quadrado, tem o dobro do comprimento de cada arco interno. Usando-se raiz quadrada de 3 igual a 1,7 e pi = 3, qual a área da região intersecção do quadrado e do círculo, assim determinado?

a) 2,8 b) 3,0 c) 3,2 d) 3,4 e) 3,6

Resolução: Essa questão foi **ANULADA** pela Banca Examinadora.



Área procurada igual à área da região contornada em vermelho, que chamaremos Área procurada.

$$\acute{A}rea\ procurada = \acute{A}rea\ do\ C\acute{i}rculo - 4\cdot \acute{A}rea\ do\ segmento\ Circular$$

$$\acute{A}rea\ do\ C\acute{i}rculo = \pi\cdot R^2 \Rightarrow \acute{A}rea\ do\ C\acute{i}rculo = 3\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \acute{A}rea\ do\ C\acute{i}rculo = \cancel{3}\times\frac{4\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}} \Rightarrow \acute{A}rea\ do\ C\acute{i}rculo = 4$$

$$\acute{A}rea\ do\ segmento\ Circular = \frac{\pi\cdot R^2}{6} - \frac{R^2\cdot sen\ \alpha}{2} = \frac{R^2}{6}\cdot(\pi - 3\cdot sen\ \alpha)$$

$$\acute{A}rea\ do\ segmento\ Circular = \frac{R^2}{6}\cdot(\pi - 3\cdot sen\ 60^o) = \frac{R^2}{6}\cdot\left(3 - 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\acute{A}rea\ do\ segmento\ Circular = \frac{R^2}{6}\cdot\left(\frac{6-3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{R^2}{12}\cdot\left(6-3\sqrt{3}\right)$$

$$\acute{A}rea\ do\ segmento\ Circular = \frac{R^2}{12}\cdot(6-5{,}1) = \frac{R^2}{12}\cdot 0{,}9 = \frac{\cancel{12}\!/9}{12}\cdot 0{,}9 = 0{,}1$$

$$\acute{A}rea\ do\ segmento\ Circular = 0{,}1 \Rightarrow 4\cdot \acute{A}rea\ do\ segmento\ Circular = 0{,}4$$

$$Da\acute{i},\ como\ a\ \acute{A}rea\ procurada = \acute{A}rea\ do\ C\acute{i}rculo - 4\cdot \acute{A}rea\ do\ segmento\ Circular$$

$$\acute{A}rea\ procurada = 4 - 0{,}4 = 3{,}6\ u.a$$

ALTERNATIVA E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006