Q1.
(LSB) Considere que A e B são conjuntos tais que:

- A tem 15 subconjuntos não vazios;
- A e B são conjuntos disjuntos; e
- $A \cup B$ tem 7 elementos.

O número total de relações binárias possíveis de A em B é:
a) 24 b) 1024 c) 2048 d) 4096

Q2.
(LSB) Considere que $f : A \to B$ é uma função de A em B, sendo A e B, conjuntos. Sabendo que o conjunto A tem 5 elementos, é CORRETO afirmar que:
a) B tem 5 elementos, necessariamente
b) $B \subset A$, isto é B é subconjunto de A
c) Im_f (imagem de f) tem 32 subconjuntos
d) B é um conjunto vazio

Q3.
(LSB) Seja $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ uma função de $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ em $\mathbb{R}$, em que $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais. A expressão de f é $f(x) = \frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x}$. Sobre f é CORRETO afirmar:
a) f é função par
b) $f(1) = 0$
c) $f(2) = 2 \cdot f(-1)$
d) $f(10) > f(0)$

Q4.
(LSB) Considere a reta no plano cartesiano cuja equação é $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$. A equação geral desta reta está representada na seguinte opção:
a) $4x + 3y = 1$
b) $-3x + 4y = 12$
c) $x + y = 12$
d) $4x + 3y = 12$

Q5.
(LSB) As retas do plano cartesiano cujas equações gerais são $(r) : ax + by + c = 0$ e $(s) : cx + by + a = 0$, com $abc \neq 0$ e $c \neq a$, se interceptam em um ponto $P(x, y)$ cuja soma das coordenadas $x + y$ vale:
a) $\frac{b-a-c}{b}$ b) $a + b + c$ c) $\frac{a+b+c}{b}$ d) $\frac{a-b+c}{c}$

Q6.
(LSB) Em uma sala de aula há 23 alunos. A média aritmética das idades destes alunos é de 20 anos de idade. A soma das idades destes alunos possui uma ordem de grandeza, em séculos, igual a:
a) 10^1 b) 10^2 c) 10^3 d) 10^4

Q7.
(LSB) Uma pessoa gasta, em média, 30 min para ir da sua casa ao trabalho fora do horário de "pico". Sabendo que, durante o horário de "pico", a mesma pessoa gasta cerca de 50 min no mesmo trajeto, qual a razão, nesta ordem, entre as velocidades escalares médias no horário de "pico" e fora deste horário?
a) $0,006$ b) 60% c) 6% d) 60

Q8.
(LSB) Duas pessoas marcam de se encontrar em um *shopping* próximo de suas respectivas casas. A primeira pessoa sai de casa às 13 h e usa uma velocidade escalar média de 30 km/h. A segunda pessoa sai de casa 30 min depois da primeira com velocidade escalar de 50 km/h, em média. Sabendo que o *shopping* fica a 20 km da casa da primeira pessoa e a 15 km da casa da segunda; concluímos, corretamente, que:
a) A 1ª pessoa chega 5 min depois da 2ª ao *shopping*
b) A 1ª pessoa espera por 8 min a chegada da 2ª ao *shopping*
c) As pessoas chegam juntas ao *shopping*
d) Se a 2ª pessoa tivesse saído 8 min antes do horário que realmente saiu de casa, elas chegariam juntas ao *shopping*

Q9.
(LSB) Um determinado objeto, a partir de $t_0 = 0$, move-se com velocidade escalar média constante de 54 km/h no sentido progressivo da trajetória, durante 20 min. Em seguida, fica em repouso por 5 min, retornando pelo mesmo trajeto ao ponto de partida $S_0 = 0$, porém com velocidade escalar média, em módulo, de 36 km/h, parando imediatamente ao chegar. A equação horária dos espaços, no S.I., é:

a) $\begin{cases} 15t & ; \quad 0 < t \leq 20 \\ -36t & ; \quad 25 < t \leq 55 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 54t & ; \quad 0 < t \leq 20 \\ 1080 & ; \quad 20 < t \leq 25 \\ 1080 - 36(t-25) & ; \quad 25 < t \leq 55 \\ 0 & ; \quad t \geq 55 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 15t & ; \quad 0 < t \leq 1200 \\ 18000 & ; \quad 1200 < t \leq 1500 \\ 18000 - 10(t-1500) & ; \quad 1500 < t \leq 3300 \\ 0 & ; \quad t \geq 3300 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 15t & ; \quad 0 < t \leq 1200 \\ 18000 & ; \quad 1200 < t \leq 1500 \\ -10t & ; \quad 1500 < t \leq 3300 \\ 0 & ; \quad t > 3300 \end{cases}$

Q10.
(LSB) Um trem de 400 m de comprimento gasta 3 min 20 s para atravessar completamente um túnel de 1 km de comprimento. Qual a velocidade escalar média do trem nessa travessia?
a) 7 km/h b) $25,2$ m/s c) $25,2$ km/h d) 5 m/s

Gabarito

1) Se A tem 15 subconjuntos não vazios, terá 16 subconjuntos no total e daí sabemos que:

$$2^{n(A)} = 15 + 1 \Rightarrow n(A) = 4$$

Como A e B são disjuntos, $n(A \cap B) = 0$, portanto:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Finalmente, $7 = 4 + n(B)$, logo $n(B) = 3$. Como $n(A \times B) = 3 \cdot 4 = 12$, o número de subconjuntos de A cartesiano B é $2^{12} = 4096$. Opção D.

2) Vamos analisar as opções:
a) Falsa. Como B é contradomínio, basta que ele seja não-vazio.
b) Falsa. Pderíamos ter $B = \mathbb{N}$ (números naturais e, ainda assim, ter uma função.
c) Verdadeira. Como há 5 elementos em A, há também 5 imagens. Daí, temos $2^{n(Im_f)} = 2^5 = 32$ subconjuntos da imagem.
d) Falsa. Se B é vazio, não teremos uma função.

3) Vamos analisar cada uma das afirmações:
a) Verdadeira. Vamos usar a definição de função par:

$$f(-x) = \frac{1 + (-x)}{1 - (-x)} + \frac{1 - (-x)}{1 + (-x)} = \frac{1 - x}{1 + x} + \frac{1 + x}{1 - x} = f(x)$$

Veja que isso vale para todo o domínio de f.
b) Falsa. Não é possível calcular $f(1)$, porque $1 \notin D_f$.
c) Falsa. Não é possível calcular $f(-1)$, porque $-1 \notin D_f$.
d) Falsa. Veja:

$$f(10) = \frac{1 - 10}{1 + 10} + \frac{1 + 10}{1 - 10} = \frac{-9}{11} - \frac{11}{9} = -\frac{202}{99}$$

E

$$f(0) = \frac{1 - 0}{1 + 0} + \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1 + 1 = 2$$

Logo $f(10) < f(0)$.

4) Teremos:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow \frac{4x + 3y}{12} = 1 \Rightarrow 4x + 3y = 12$$

Opção D.

5) O que queremos é resolver o sistema de equações lineares a seguir:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ cx + by + a = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por c e a segunda por a teremos o sistema como segue:

$$\begin{cases} acx + bcy + c^2 = 0 \\ acx + bay + a^2 = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira da segunda equação teremos:

$$bcy - bay + c^2 - a^2 = 0$$

Colocando alguns fatores em evidência:

$$by(c - a) + (c - a)(c + a) = 0$$

Como $c \neq a$, temos $y = -\frac{a+c}{b}$.

Vamos calcular x:

$$ax + b\left(-\frac{a + c}{b}\right) + c = 0 \Rightarrow ax - a - c + c = 0 \Rightarrow x = 1$$

Então:

$$x + y = 1 - \frac{a + c}{b} = \frac{b - a - c}{b}$$

Opção A.

6) Como a média $m = 20$ é a soma das idades S dividida pelo número $n = 23$ de alunos, teremos:

$$\frac{S}{n} = m \Rightarrow S = 23 \cdot 20 \Rightarrow S = 460\,\text{anos}$$

Que corresponde a $4,6$ séculos. Em notação científica teremos $4,6 \cdot 10^0$ séculos. Logo, a O.G. é igual a 10^1, já que $4,6 > 3,16$. Opção A.

7) Sejam d a distância no trajeto, v_p a velocidade no horário de pico e v_f a velocidade fora deste horário. Assim, teremos $v_p = \frac{d}{50}$ e $v_f = \frac{d}{30}$. Calculando $\frac{v_p}{v_f}$:

$$\frac{v_p}{v_f} = \frac{\frac{d}{50}}{\frac{d}{30}} = \frac{d}{50} \cdot \frac{30}{d} = \frac{30}{50} = 0,6 = 60\%$$

Opção B.

8) Vamos calcular os intervalos de tempo Δt_1 e Δt_2 da primeira e da segunda pessoa de sua respectiva casa até o *shopping*:

$$v_1 = \frac{d_1}{\Delta t_1} \Rightarrow 30 = \frac{20}{\Delta t_1}$$

Logo $\Delta t_1 = \frac{2}{3}$ h. Para a segunda pessoa:

$$v_2 = \frac{d_2}{\Delta t_2} \Rightarrow 50 = \frac{15}{\Delta t_2}$$

Portanto, $\Delta t_2 = \frac{3}{10}$ h. Agora só precisamos verificar a difereça entre os horários de chegada ao *shopping*. Para a primeira pessoa, que saiu às 13 h:

$$\Delta t_1 = t_{f_1} - t_{0_1} \Rightarrow \frac{2}{3} = t_{f_1} - 13 \Rightarrow t_{f_1} = \frac{2}{3} + 13$$

Para a segunda pessoa, que saiu 30 min depois, ou seja, às $13,5$ h:

$$\Delta t_2 = t_{f_2} - t_{0_2} \Rightarrow \frac{3}{10} = t_{f_2} - 13,5 \Rightarrow t_{f_2} = \frac{3}{10} + 13,5$$

Vamos calcular $t_{f_1} - t_{f_2}$:

$$t_{f_1} - t_{f_2} = \frac{2}{3} + 13 - \left(\frac{3}{10} + 13,5\right)$$

Portanto:

$$t_{f_1} - t_{f_2} = \frac{2}{3} - \frac{3}{10} - \frac{1}{2} = \frac{20 - 9 - 15}{30} = -\frac{4}{30}\,\text{h}$$

Passando para minutos $-\frac{4}{30} \cdot 60 = -8$ minutos. Ou seja, como a diferença entre o horário da primeira pessoa e o da segunda é negativo, ela chegou primeiro e esperou por 8 minutos. Significa que se, a segunda pessoa tivesse saído 8 minutos mais cedo, chegariam juntas. Opção D.

9) Vamos escrever cada parte do movimento no S.I. Sabendo que $54\,\text{km/h} = 15\,\text{m/s}$ e, além disso, $20\,\text{min} = 20 \cdot 60 = 1200\,\text{s}$, teremos a primeira parte do movimento:

$$s_1 = 0 + 15t \qquad \text{para } 0 < t \leq 1200$$

Para $t = 1200$ teremos $s = 15 \cdot 1200 = 18000$ m. Para a segunda parte temos repouso durante $5\,\text{min} = 5 \cdot 60 = 300\,\text{s}$. Daí:

$$s_2 = 18000 \qquad \text{para } 1200 < t \leq 1500$$

No terceiro movimento, a partir de $t = 1500$ s, teremos velocidade de $36\,\text{km/h} = 10\,\text{m/s}$ de forma regressiva a partir de 18000 m. Como já sabemos a distância percorrida na ida, teremos $\Delta t_3 = \frac{18000}{10} = 1800\,\text{s}$. Logo:

$$s_3 = 18000 - 10(t - 1500) \qquad \text{para } 1500 < t \leq 3300$$

A partir daí teremos repouso, $s_4 = 0$, para $t > 3300$. Opção C.

10) Para que o trem ultrapasse completamente o túnel ele deve percorrer seu comprimento mais o comprimento do túnel. Passando o tempo para segundos e aplicando a definição de velocidade escalar média:

$$v = \frac{400 + 1000}{3 \cdot 60 + 20} = \frac{1400}{200} = 7\,\text{m/s}$$

Passando a velocidade de m/s para km/h, teremos $7 \cdot 3,6 = 25,2$ km/h. Opção C.

Gabarito

Q1. D
Q2. C
Q3. A
Q4. D
Q5. A
Q6. A
Q7. B
Q8. D
Q9. C
Q10. C